# Thèse de Doctorat

*Spécialité : Mathématiques Appliquées*

présentée à

**L'Université de Picardie Jules Verne**

par

**Georges Sadaka**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

# *Etude mathématique et numérique d'équations d'ondes aquatiques amorties.*

**Soutenue le 25 Novembre 2011 après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **M.** | **Jean-Paul CHEHAB** | **Professeur** | **Directeur de thèse** |
| **M$^{me}$** | **Min CHEN** | **Professeur** | **Rapporteur** |
| **M.** | **Frédéric COQUEL** | **Directeur de Recherches** | **Examinateur** |
| **M.** | **Denys DUTYKH** | **Chargé de Recherches** | **Examinateur** |
| **M.** | **Cédric GALUSINSKI** | **Professeur** | **Rapporteur** |
| **M.** | **Olivier GOUBET** | **Professeur** | **Examinateur** |
| **M.** | **Youcef MAMMERI** | **Maître de Conférences** | **Examinateur** |
| **M$^{me}$** | **Véronique MARTIN** | **Maître de Conférences** | **Examinateur** |

*A ma mère et mon père.*

# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Jean-Paul Chehab, qui m'a encadré pendant la durée de cette thèse. Jean-Paul a toujours su m'indiquer de bonnes directions de recherche et que aux bons moments, il a su être très présent mais aussi il m'a fait confiance et m'a laisser de l'initiative. Je pense avoir énormément appris à son contact, j'ai sincèrement apprécié de travailler avec lui et lui suis reconnaissant pour le temps qu'il ma consacré (jours et nuits) et toutes les opportunités qu'il m'a données au cours de cette thèse. J'assume d'avoir eu la chance d'être son premier thésard.

Je tiens aussi à remercier le Conseil Régionale de Picardie ainsi que les Fonds Européen de Développement Régional pour leur financement de ma thèse.

Je suis également très reconnaissant à Min Chen et Cédric Galusinski d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'aux autres membres du jury, Frédéric Coquel, Denys Dutykh, Olivier Goubet, Youcef Mammeri et Véronique Martin.

Mes remerciements vont également à Emmanuel Audusse, Frédéric Coquel, Olivier Delestre, Bruno Despres, Denys Dutykh, Antoine Le-Hyaric, Nuno Lopes, Youcef Mammeri, Véronique Martin, Dimitrios Mitsotakis, Pierre Navaro, Olivier Pantz, Kirill Pichon, Laurent Renault et Jacques Saint-Marie qui sans être mes directeurs de thèse, ont grandement contribué à ma formation en répondant avec patience à mes questions de jeune naïf.

Par ailleurs je voudrais remercier la famille du laboratoire LAMFA et tout ses membres enseignants-chercheurs avec qui j'ai discuté, en particulier Olivier Goubet, le chef et le directeur de ce laboratoire, pour tout son encouragement et les opportunités que j'ai trouvé en tant que membre dans cette famille.

J'ai eu la chance tout au long de ces trois années d'être aidé par des assistantes administratives extrêmement efficaces et qui m'ont rendu la vie plus facile. Merci beaucoup donc à Jeannine Bondelu, Christelle Calimez, Martine Hazebroucq, Virginie Pecourt, Irène Rasoarinoro et Isabelle Wallet.

Je remercie aussi tous mes collègues, Mohamed Abaidi, Benoît Bartoux, Khaled Bouguila, Julien Caron, Jean-Baptiste Duval, Ayman El Doussouki, Emna Ezzoug, Thomas Gobet, Wided Kechiche, Amandine Leriche, Julien Leroy, Thomas Longlet, Nadir Maaroufi, Wu Meng, Baptiste Rognerud, Guillaume Warnault, ... Je ne me risquerai pas à citer tous mes collègues parce que je serais certain d'en oublier, mais je n'en pense pas moins.

Je ne peux jamais oublier mes amis Elie Bitar, Fadi Abou Fayçal, Hassan Esper, Elie Kafrouni, Louai Kilanni, Joseph Sebaaly et leurs familles ainsi qu'Hiam Abboud, Danny Baroody, Gloria Faccanoni, Tony Gerges, Michael Gutnic, Philippe Hoch, Gérald Samba et Nicolas Seguin pour le temps qu'on a passé ensemble.

Un grand merci à Antoine Ayache, je lui suis très reconnaissant pour son aide depuis mon arrivée en France.

Finalement, je remercie tous les membres de ma famille qui m'ont soutenues le long de mes études en thèse.

Sans auncun doute, je dédie cette thèse à deux personnes qui m'ont donnés la vie et qui me donne tout le temps envie de survivre pour passer toutes les difficultés de la vie, bien sûr je parle de ma mère et mon père.

## Résumé

Cette thèse porte sur l'étude d'ondes hydrodynamiques amorties et s'articule plus précisément autour de deux modèles :

Tout d'abord, l'équation de KdV forcée et amortie sur le tore

$$u_t + \mathcal{L}u + u_{xxx} + uu_x = f(x) \in \mathbb{T}(0, L)$$

avec un amortissement $\mathcal{L}$ exprimé en Fourier par

$$\mathcal{L}u = \sum_{k \in Z} \gamma_k \hat{u}_k e^{2i\pi x/L}.$$

Ici $\gamma_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, de sorte à ce que la norme $L^2$ diminue au cours du temps. Nous nous concentrons sur le cas $\lim_{|k| \to +\infty} \gamma_k = 0$ qui constitue un amortissement très faible. Nous établissons des estimations de l'amortissement dans le cas homogène et, dans le cas non homogène, nous mettons en évidence numériquement des phénomènes de régularisation Sobolev au cours du temps, calculons des solutions stationnaires mais aussi périodiques en temps. Ce type de résultats avait été obtenu dans le cas $\gamma_k = ctse = \gamma$ d'une part numériquement, par Ghidaglia puis Goubet, pour la régularisaion en temps et, d'autre part, pour les solutions périodiques par Rosa et Cabral. Nous montrons donc que ces phénomènes perdurent avec un amortissement encore plus faible et qui constitue un cas limite puisque si les $\gamma_k$ s'annulent sur une bande de fréquence la solution ne peut être toujours amortie. Cette partie est complétée par une étude comparative des amortissements dans différents cas : amortissement local en espace, non-local en espace et en temps. On utilise une fonction de rapports d'énergies particulière pour y parvenir.

Le deuxième axe de la thèse porte sur les systèmes de Boussinesq 2D. Ici l'amortissement peut être produit par le fond. On effectue la dérivation du modèle complet des systèmes de Boussinesq 2D, avec fond variable. Pour la simulation, nous avons développé un code FreeFem++ que nous avons validé avec des résultats existants dans le cas du fond plat. On considère ensuite le cas du fond variable (en espace seulement ou bien en espace et en temps), ce qui constitue la situation de génération des Tsunamis. L'avantage ici est de pouvoir incorporer la bathymétrie et on regarde l'influence de la géométrie du fond sur l'énergie de l'écoulement. Les résultats numériques présentés portent sur des géométries simple mais aussi sur des situations incorporant des données réelles (simulation de Tsunamis en Méditerranée avec importation de la géographie et de la bathymétrie).

Une troisième partie rassemble un travail effectué au CEMRACS 2010, qui porte sur un autre thème que celui de la thèse : les équations Grad-Shafranov et de Current Hole en MHD.



**Mots clés : équations de KdV amorties, estimations d'énergie, comportement pour les grands temps, méthode de collocation-Fourier, systèmes de Boussinesq 2D, FreeFem++, simulations de Tsunami, méthodes des éléments finis.**

## Abstract

The aim of this thesis is the numerical study and the simulation of damped waterwaves and focuses on two models :

First, the forced and damped Korteweg-de vries equation on the torus

$$u_t + \mathcal{L}u + u_{xxx} + uu_x = f(x) \in \mathbb{T}(0, L)$$

where the damping $\mathcal{L}$ is defined in Fourier as

$$\mathcal{L}u = \sum_{k \in Z} \gamma_k \hat{u}_k e^{2i\pi x/L}.$$

Here $\gamma_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, in such a way the $L^2$ decreases (when $f = 0$). A particular attention is given to the case $\lim_{|k| \to +\infty} \gamma_k = 0$ which defines a very weak damping. We establish some estimates of the damping in different norms in the homogeneous case and, when the equation is forced ($f \neq 0$) we point out numerically regularization effects in time ; we compute steady states and also time-periodic solutions. This kind of result have been obtained in the case of the so-called *weak damping*, say for $\gamma_k = cste = \gamma$ by Ghidaglia, then Goubet for the time regularization and, numerically by Rosa and Cabral for the time periodic solutions. We give here numerical evidences that show that these phenomena still hold for a even weaker damping. This seems to be the limit case since if $\gamma_k$ vanish on a band of frequencies, the damping can not be allways observed (we give counter-exemples). We complete this part by making a comparison of different dampings (local and non local in space and in time). For that purpose, we use an appropriate function based on the ratio of two energy norms.

The second part of the thesis concerns the 2D Boussinesq system. Here the damping can be produced by the variations of the bottom. First, we make the derivation of the whole system including the variation of the bottom. We developed a finite element code in FreeFem++ validated by comparing our results with existing ones, first considering a flat bottom. Then, we consider the variable bottom (in space and/or in time) which is the situation of the Tsunamis. With our approach and our code, we can implement easily both bathymetry and geographic real data. We then obtained numerical results first for simple geometries this allows us to observe the influence of the bottom throughout the evolution of the energy of the wave in time. After that, we present simulations with realistic data on the generation of a Tsunami in the Mediterranean sea.

Finally, we add a work realized during a summer school in scientific computing in Marseille (CEMRACS 2010) and which is independent of the topic of the thesis. It deals with Grad-Shafranov and the Current Hole equations in MHD.



**Keywords : damped KdV equations, energy estimates, long time behavior, collocation-Fourier method, Boussinesq 2D systems, FreeFem++, Tsunami simulations, finite element method.**

# Table des matières

**INTRODUCTION** **i**
Motivation générale . . . . . i
Equations de KdV amorties . . . . . i
Systèmes de Boussinesq amortis . . . . . viii
Organisation de la thèse . . . . . xxv
Conclusion et perspectives . . . . . xxv

**I OBTENTION DES MODÈLES** **1**
I.1 Historique des équations . . . . . 1
I.2 Obtention des systèmes de Boussinesq et KdV en 1D . . . . . 5
I.3 Obtention des systèmes de Boussinesq 2D . . . . . 12

**II EQUATIONS DE KdV AMORTIES** **21**
II.1 Etude d'un modèle d'amortissement . . . . . 21
II.1.1 Introduction . . . . . 22
II.1.2 Le modèle . . . . . 24
II.1.3 Schémas numériques . . . . . 32
II.1.4 Résultats numériques . . . . . 40
II.1.5 KdV forcée . . . . . 50
II.2 Etude d'autres types d'amortissements . . . . . 61
II.2.1 Amortissement local en espace . . . . . 61
II.2.2 Amortissement non-local en temps . . . . . 69
II.3 Comparaison des vitesses d'amortissement . . . . . 72
II.4 Conclusions et perspectives . . . . . 73

**III SYSTÈMES DE BOUSSINESQ AMORTIS** **79**
III.1 Résolution du système de Boussinesq sur un fond plat . . . . . 81
III.1.1 Résultats d'analyse des systèmes de Boussinesq . . . . . 81
III.1.2 Discrétisation en espaces . . . . . 83
III.1.3 Discrétisation en temps . . . . . 84
III.1.4 Simulations Numériques . . . . . 85
III.2 Résolution du système de Boussinesq sur un fond variable en espace . . . . 104
III.3 Résolution du système de Boussinesq sur un fond dynamique . . . . . 111
III.4 Résolution du système de Boussinesq avec des données réalistes . . . . . 116
III.5 Conclusion et perspectives . . . . . 130

**A CEMRACS 2010** **135**

# Table des figures


1 $\hat{u}_k(0) = \frac{1}{(1+|k|)}$ si $k$ est paire, 0 si $k$ est impaire, $\gamma_k = 1, \forall k, f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . v

2 Solutions stationnaires trouvées avec différent $\gamma_k$ pour $u_0(x) = sin(2\pi x/L)$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . vi

3 $T = 10, N = 2499, 0 < x < 500, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = \alpha, f(x,t) = 0$. . . . . vii

4 Comparaison de l'opérateur $G^2(t)$ de la solution pour différents types d'amortissement sur $[0, L]$ où $L = 20$. . . . . vii

5 A gauche : exemple de mangroves, Smithsonian Institution. A droite : lutter contre la corrosion du littoral, Saint Malo, France. . . . . viii

6 Le dispositif "Oyster" pour produire de l'énergie à partir des vagues. . . . viii

7 Affichage de la solution et du maillage du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0.1, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_adaptmesh.avi. . . . . xi

8 Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à travers un port pour les différents temps $t = \{0, 19, 49, 60\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_HARBOR_Soliton.avi. . xii

9 Energie totale avec différents types de fonds. . . . . xiv

10 A gauche la solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ et à droite sa coupe en $(y = 0)$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton.avi et sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton_Cut_y_0.avi. . . . . xv

11 Energie cinétique, potentielle et totale pour le fond dynamique $DB1$. . . . xvi

12 Maximum de la solution à $t = 100s$. . . . . xvii

13 A gauche la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique et à droite sa coupe en $(x = 0)$ pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_PBC.avi et sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_Cut_x_0_PBC.avi. . . . . xviii

14 La mer Méditerranée après assemblage avec Photoshop®. . . . . xix

15 Le maillage généré par FreeFem++ pour la mer Méditerranée. . . . . xix

16 Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 1000sec$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_MAX_P1.avi. . . . . xx
17 Le problème du non lissage aux bords. . . . . xx
18 Les lignes de longitude et de latitude de la terre (à gauche). Le site de NOAA (à droite). . . . . xxi
19 Le maillage autour de Chypre avant et après le lissage des bords en utilisant le script d'Olivier Pantz. . . . . xxii
20 Adaptation de maillage autour de Chypre après le script d'Olivier Pantz. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/chypre_adaptmesh.avi. . . . . xxii
21 Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 0$ et $75sec$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/propagation_tsunami_Chypre_P1.mpeg. . . . . xxiii
22 Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 100$ et $225sec$. . . . . xxiv

I.1 Recréation du soliton de John Scott Russell en 1995, Heriot-Watt University. 2
I.2 Propagation de deux solitons : $u_0(x) = 3c_1\text{sech}^2\left(\sqrt{c_1/4}(x - p_1 \cdot L)\right) + 3c_2\text{sech}^2\left(\sqrt{c_2/4}(x - p_2 \cdot L)\right)$ où $c_1 = 4, p_1 = .1, c_2 = 1, p_2 = .4$. . . . . 3
I.3 Intersection de deux solitons et les invariants correspondants pour : $u_0(x) = 3c_1\text{sech}^2\left(\sqrt{c_1/4}(x - p_1 \cdot L)\right) + 3c_2\text{sech}^2\left(\sqrt{c_2/4}(x - p_2 \cdot L)\right)$ où $c_1 = 4, p_1 = .1, c_2 = 1, p_2 = .4$. . . . . 4
I.4 Domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} \subset \mathbb{R}^2$. . . . . 5
I.5 Domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$. . . . . 12

II.1 $u_0(x) = 3c_1\text{sech}(\sqrt{c_1}(x - p_1 \cdot L)/2)^2, c_1 = 2, p_1 = .4$. . . . . 22
II.2 Différents profils d'amortissement en fréquence. . . . . 41
II.3 Energie spectrale de différentes données initiales. . . . . 42
II.4 Comparaison de taux de précision des schémas pour $\gamma_k = 1, \forall k$. . . . . 43
II.5 Comparaison de taux de précision des schémas pour $\gamma_k = \frac{1}{1+|k|}$. . . . . 44
II.6 $f = 0$, $\widehat{u_0}_{2k+1} = 0$ et $\gamma_{2k} = 0, \gamma_{2k+1} = 1$. . . . . 45
II.7 $f = 0$, $\widehat{u_0}_{2k+1} = 0$ et $\gamma_{2k+1} = 0, \gamma_{2k} = 1$. . . . . 46
II.8 $u_0(x) = S1$, $\gamma_k = 1, \forall k$, $f(x) = 0$. . . . . 47
II.9 $u_0(x) = S3$, $\gamma_k = 1, \forall k$, $f(x) = 0$. . . . . 47
II.10 $u_0(x) = S1$,$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)}$, $f(x) = 0$. . . . . 48
II.11 $u_0(x) = S3$,$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)}$, $f(x) = 0$. . . . . 48
II.12 $u_0(x) = S1$ ,$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^2}$, $f(x) = 0$. . . . . 49
II.13 $u_0(x) = S3$ , $\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^2}$, $f(x) = 0$. . . . . 49
II.14 Solutions stationnaires trouvées avec différent $\gamma_k$, $u_0(x) = S3$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 52
II.15 Evolution de $\|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2}$ pour $\gamma_k = 1, \forall k$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$, différentes $u_0(x)$. 52
II.16 Evolution de $\|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2}$ pour $\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^{.5}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$, différentes $u_0(x)$. 53
II.17 $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = 2.7, \forall k$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 54

II.18 $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{3.8}{(1+|k|)^{0.3}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 55
II.19 $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{4.8}{(1+|k|)^{0.5}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 56
II.20 $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{9.9}{(1+|k|)^{1.2}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 57
II.21 $\hat{u}_k(0) = \dfrac{1}{(1+|k|)}$ si $k$ est paire, 0 si $k$ est impaire, $\gamma_k = 1, \forall k, f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 59
II.22 $u_0(x) = S2$ ,$\gamma_k = 1, \forall k$ $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 59
II.23 $u_0(x) = S1$ ,$\gamma_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^{1/4}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 60
II.24 $u_0(x) = S2$ ,$\gamma_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^{1/4}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$. . . . . 60
II.25 $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies. . . . . 63
II.26 $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies. . . . . 63
II.27 Norme $L^2$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies. . . . . 64
II.28 Norme $L^2$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies. . . . . 64
II.29 Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies. . . . . 65
II.30 Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies. . . . . 65
II.31 Norme $|u|_{L^2}$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 66
II.32 Norme $|u|_{L^2}$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 66
II.33 Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 67
II.34 Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 67
II.35 $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 68
II.36 $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$. . . . . 68
II.37 $T = 10, N = 2499, 0 < x < 500, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = \mu, f(x,t) = 0$. . . . . 71

II.38 Comparaison de l'opérateur $G^2(t)$ de la solution pour différents types d'amortissement sur $[0, L]$ où $L = 20$. . . . . 72

III.1 Le taux de précision pour BBM-BBM. . . . . 86

III.2 Affichage de la solution et du maillage du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0.1, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_adaptmesh.avi. . . . . 87

III.3 Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Gaussian.avi. . . . . 88

III.4 Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Gaussian_cut.avi. 89

III.5 Solution du système Bona-Smith où $a = 0, b = d = 1/3$ et $c = -1/3$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BS_Gaussian.avi. . . . . 90

III.6 Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système Bona-Smith où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ for different time $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BS_Gaussian_cut.avi. . . . 91

III.7 Solution du système de Boussinesq où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BSAN_Gaussian.avi. . . . . 92

III.8 Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système de Boussinesq où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BSAN_Gaussian_cut.avi. . . . . 93

III.9 Solution du système général de Boussinesq où $a = c = -1/12$ et $b = d = 1/4$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/GB_Gaussian.avi. . . . . 94

III.10 Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système général de Boussinesq où $a = c = -1/12$ et $b = d = 1/4$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/GB_Gaussian_CUT.avi. . . . . 95

III.11 Solution du système KdV-KdV de Boussinesq où $a = c = 1/6$ et $b = d = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 10, 20, 35, 55, 60\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/KdV_KdV_Gaussian.avi. . . . . 97

III.12 Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système KdV-KdV de Boussinesq où $a = c = 1/6$ et $b = d = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 10, 20, 35, 55, 60\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/KdV_KdV_Gaussian_Cut_x_0.avi. . . . . 98

III.13 Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 24, 30, 50\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Soliton.avi. . . . . 100

III.14Coupe en $(y = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 24, 30, 50\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Soliton_cut.avi. 101
III.15Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à travers un port pour les différents temps $t = \{15, 19, 30, 49, 60, 68, 80, 100\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_HARBOR_Soliton.avi. . . . . 103
III.16Norme $L^2$ de la solution avec différents types de fonds. . . . . 105
III.17Energie cinétique avec différents types de fonds. . . . . 106
III.18Energie potentielle avec différents types de fonds. . . . . 106
III.19Energie totale avec différents types de fonds. . . . . 107
III.20A gauche, le fond du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ et à droite sa coupe transversalle par rapport à $y = 0$. . . . . 108
III.21Solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60, 67, 100\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton.avi. . . . . 109
III.22Coupe en $(y = 0)$ de la solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60, 67, 100\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton_Cut_y_0.avi. . . . . 110
III.23Energie cinétique, potentielle et totale pour le fond dynamique $DB1$. . . . 112
III.24Maximum de la solution à $t = 100s$. . . . . 113
III.25Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique, pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5, 10, 40, 100\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_PBC.avi. . . . . 114
III.26Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique, pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5, 10, 40, 100\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_Cut_x_0_PBC.avi. . . . . 115
III.27Les photos des deux parties de la mer Méditerranée. . . . . 116
III.28La mer Méditerranée après assemblage avec Photoshop®. . . . . 116
III.29La mer Méditerranée. . . . . 117
III.30La mer Méditerranée en format .pgm. . . . . 117
III.31Le maillage généré par FreeFem++ pour la mer Méditerranée. . . . . 118
III.32Propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = \{0, 100, 400\}$. Le *Tsunami* est généré au large de la Crête. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee.avi. . . . . 119
III.33Propagation de la solution et du maillage d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = \{0, 100, 400\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_mesh.avi. . . . . 120

III.34Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 1000sec$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_MAX_P1.avi. . . . . 121
III.35Le maillage autour de Chypre en utilisant le script de Frédéric Hecht. . . . 121
III.36Le maillage autour de Chypre en utilisant le script d'Olivier Pantz. . . . . 122
III.37Adaptation de maillage autour de Chypre après le script d'Olivier Pantz. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/chypre_adaptmesh.avi. . . . . 123
III.38Bathymétrie téléchargée du site de NOAA, (min $= -2.842km$ et max $= 2.973km$). . . . . 124
III.39Maillage généré à travers le script d'Olivier Pantz. . . . . 125
III.40Le fond de la bathymétrie téléchargée du site de NOAA, (min $= -2.842km$ et max $= -0.01km$). . . . . 126
III.41Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 0$ et $25sec$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/propagation_tsunami_Chypre_P1.mpeg. . . . . 127
III.42Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de la Chypre pour $t = 75$ et $100sec$. . . . . 128
III.43Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de la Chypre pour $t = 150$ et $225sec$. . . . . 129
III.44Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 230sec$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/max_solution_tsunami_Chypre_P1.avi. . . . . 130

A.1 Future machine ITER (à gauche), domaine toroïdale (à droite) . . . . . 135

# INTRODUCTION

## Motivation générale

La compréhension des phénomènes de propagation d'ondes non linéaires est un des thèmes actuels majeurs : il suscite en effet des intérêts de pure investigation (modélisation, analyse mathématique) mais aussi des applications aux retombées importantes dans les domaines des communications (propagation d'un signal) comme de l'écologie s'agissant de la modélisation des ondes maritimes (Tsunami [DiaDut07, DiaDut07*], vagues scélérates [Cham09]) qui concernent les populations et les installations industrielles.

La modélisation d'amortissements d'équations d'ondes aquatiques est un domaine important, difficile et en pleine expansion. En effet, il s'agit idéalement, d'une part, de prendre en compte l'amortissement dans la modélisation, de sorte à pouvoir restituer fidèlement la physique du problème considéré et, d'autre part, de chercher à comprendre le processus d'amortissement pour pouvoir agir en situation (atténuation efficace des vagues en vue de protéger le littoral, les populations). Appréhender ces phénomènes d'un point de vue, aussi bien quantitatif que qualitatif, est un moyen de sélectionner les modèles pertinents ; cette étape est essentielle à la compréhension de ces phénomènes naturels ou idéalisés.

L'objet de cette thèse est de considérer l'amortissement d'équations d'ondes hydrodynamiques dans deux situations différentes et d'en analyser aussi bien qualitativement que quantitativement les effets à l'aide de simulations numériques. On s'intéressera dans un premier temps aux équations de Korteweg - de Vries amorties [KdV1895] (KdV). La seconde partie sera consacré aux systèmes de Boussinesq à fond variable. Dans ce dernier cas, le fond jouera le rôle d'amortissement (voir Figure 9).

## Equations de KdV amorties

Dans un premier temps, nous considérons la propagation unidirectionnelle d'une onde de surface modélisée par les équations de KdV forcées

$$u_t + \mathcal{L}(u) + u_{xxx} + uu_x = f. \tag{1}$$

Ici $\mathcal{L}$ est l'opérateur (linéaire) représentant l'amortissement et qui vérifie

$$\int_0^L \mathcal{L}(u)u dx \geq 0,$$

ce qui assure une décroissance de la norme $L^2$ en temps.
Dans [OttSud69, OttSud70], Ott et Sudan ont proposé différents amortissements correspondant à des situations physiques bien déterminées :

- cas des ondes magnétostatiques amorties par des ions

$$\mathcal{L}(u) = -\partial_x^2 u,$$

- son ionique amorti par des collisions ions-neutron

$$\mathcal{L}(u) = u,$$

- amortissement Landau

$$\mathcal{L}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{x-y},$$

- ondes de Saint-Venant amorties par la viscosité

$$\mathcal{L}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{sign(x-y)}{|x-y|^{1/2}} dy.$$

Plus récemment, Dutykh [Dut07] a utilisé pour représenter la propagation d'un Tsunami, le cadre physique suivant :

$$\mathcal{L}(u) = \nu \int_0^t \frac{u_x}{\sqrt{t-s}} ds;$$

signalons aussi l'amortissement non local étudié par Chen, Dumont, Dupaigne et Goubet dans [ChenDumDupGou10] :

$$\mathcal{L}(u) = \nu \int_0^t \frac{u_t}{\sqrt{t-s}} ds.$$

L'étude du comportement des solutions pour les grands temps est un moyen pertinant pour mesurer les effets des amortissements. Lorsque $\mathcal{L} = -\nu\partial_x^2$ ($\nu > 0$), l'amortissement se traduit par une régularisation de type parabolique des solutions : les composantes hautes fréquences sont celles les plus atténuées au cours du temps, la solution gagne en régularité en espace avec le temps. Lorsque $\mathcal{L} = \gamma \mathrm{Id}$ ($\gamma > 0$), les fréquences sont toutes amorties à la même vitesse et il n'y a donc aucune raison d'espérer une régularisation de la solution en des temps arbitrairement petits. Le résultat surprenant de Ghidaglia [Ghi94] puis de Goubet et Rosa [Gou00, GouRosa02] est que pour certaines équations d'ondes faiblement amorties, telles Schrödinger non linéaires (NLS) ou KdV forcées, l'on retrouve ces caractéristiques asymptotiquement (régularisation + présence d'attracteur), alors que l'amortissement n'a pas d'effet régularisant en temps fini.

L'existence d'un attracteur dans un espace fonctionnel de fonctions plus régulières pour l'équation forcée autorise une dynamique non-triviale pour les grands temps. C'est justement ce que Rosa et Cabral [CabRosa04] ont mis en évidence, numériquement : pour des paramètres d'amortissement bien choisis, ils ont exhibé des solutions périodiques en temps.

L'amortissement $\mathcal{L} = \gamma Id$ est dit *faible* (*a contrario* du cas $\mathcal{L} = -\nu\partial_x^2$ dit *fort*). Dans ce cas, l'énergie $L^2$ de la solution est uniformément amortie alors que dans le cas non forcé

$$u_t + \gamma u + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

on a une décroissance exponentielle

$$|u(t)|_{L^2} = e^{-\gamma t}|u(0)|_{L^2}.$$

Une question naturelle se pose dès lors : les phénomènes de régularisations asymptotiques, de dynamique non triviale pour les grands temps ont-ils toujours lieu lorsque l'amortissement est encore plus faible, c'est à dire,

$$\exists C_1 > 0 / 0 \leq \int \mathcal{L}(u)udx \leq C_1 \int u^2 dx \text{ et } \nexists C_2 > 0 / \int \mathcal{L}(u)udx \geq C_2 \int u^2 dx \qquad ?$$

Une façon de construire de tels opérateurs d'amortissement *très faibles* est de se placer en Fourier. On propose de considérer l'opérateur

$$\mathcal{L}_\gamma(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \hat{u}_k(t) e^{\frac{2i\pi x}{L}}$$

où $\gamma_k$ est une suite de réels positifs ou nuls, avec $\gamma_k = \gamma_{-k}$ de sorte à ce que

$$0 \leq \int \mathcal{L}_\gamma(u)udx \leq \int u^2 dx.$$

Cette formulation de $\mathcal{L}_\gamma$ permet de retrouver les situations précédemment décrites (par exemple, $\mathcal{L}_\gamma(u) = -\partial_x^2 u$ si $\gamma_k = |k|^2$ ) ; elle permet aussi de considérer des amortissements très faibles, lorsque $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$.
Nous considérons donc le problème

$$u_t + u_{xxx} + \mathcal{L}_\gamma(u) + uu_x = f,\ x \in \mathbb{T}, t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

où $\mathbb{T}$ désigne le tore $[0, L], L > 0$.

L'analyse mathématique d'un tel amortissement (vitesse et propriétés de régularisation) semble à ce stade difficile à mener. C'est pourquoi nous proposons de dégager des pistes à l'aide de simulations numériques. Nous cherchons à voir (numériquement) si le problème de Cauchy (2) - (3) a des propriétés similaires à celles établies ou observées dans le cas $\mathcal{L}_\gamma = \gamma\mathrm{Id}$. Nous n'aborderons pas les questions liées à l'étude du problème de Cauchy. On examinera, plus particulièrement, les quatre points suivants :

**i- Mesure numérique de la vitesse de l'amortissement dans le cas homogène ($f = 0$)**
Il est naturel de travailler dans les espaces d'énergie indexés par les suites

$$H_\gamma = \{u \in L^2 / \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k|^2 < +\infty\},$$

muni de sa norme associée $|u|_\gamma = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k|^2}$.
Dans le cas linéaire, et moyennant des hypothèses de régularité de la donnée initiale ainsi que de l'asymptotique de $\gamma_k$, on peut obtenir une décroissance polynômiale,

**Proposition 1.** *(voir Proposition 11) Supposons qu'il existe $\alpha, \beta$ et $C$, trois nombres réels strictement positifs tel que*
*i.* $|\hat{u}_{0k}|^2 \leqslant C\gamma_k^{2\delta}$ *avec* $\delta = \alpha + \beta$.
*ii.* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^{2\beta} < +\infty$.
*Alors*

$$|u|_{L^2}^2 \leqslant Ce^{-1}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{2\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^{2\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

*En particulier, si $\alpha > 1$, $|u|_{L^2}$ décroît super linéairement en temps.*

Dans le cas non linéaire une telle estimation ne peut plus être obtenue. Nous introduisons alors une fonction temporelle du rapport de la (semi-)norme d'énergie de l'amortissement $< \mathcal{L}(u), u >= |u|_\gamma^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k|^2$ et de la norme $L^2$ de la solution $|u|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2$, soit

$$G(t) = \frac{|u|_\gamma}{|u|_{L^2}}.$$

Nous montrons que

**Proposition 2.** *(voir Proposition 15) Soit $u(x,t)$ une solution régulière de l'équation homogène (2). Nous supposons que $G(u,t)$ est $\mathcal{C}^1$ en $t$. Alors nous avons les estimations*
– $|u(t)|_{L^2}^2 = e^{-\int_0^t G^2(s)ds} |u_0|_{L^2}^2$,
– $|u(t)|_\gamma^2 = G^2(t) e^{-\int_0^t G^2(s)ds} |u_0|_{L^2}^2$.

*En particulier, $\lim_{t\to+\infty} |u|_{L^2} = 0$ si et seulement si $t \mapsto G(t) \notin L_t^2(0,+\infty)$.*

Et sa version dans le cas non-homogène

**Proposition 3.** *(voir Proposition 16) Supposons que $f$ appartient à $H_{\frac{1}{\gamma}}$ et que $u_0 \in L^2 \cap H_\gamma$. Alors*

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq e^{-\int_0^t G^2(s)ds} |u_0|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-\int_s^t G^2(\tau)d\tau} |f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 ds.$$

Pour la simulation, nous proposons plusieurs schémas numériques en temps implicites/semi-implicites :
– Euler implicite,
– Crank Nicolson,
– Sanz-Serna,

– splitting de Strang,
– splitting.

La discrétisation spatiale est réalisée par Fourier-collocation. Pour chacun de ces schémas, nous établissons des résultats de stabilité $L^2$ et des propriétés sur le comportement asymptotique en temps de la solution. Nous retrouvons dans certains cas des versions discrètes des propositions énoncées ci-dessus dans le cas continu.

**ii-Régularisation numérique au cours du temps**
Il s'agit, ici, d'observer d'éventuels phénomènes de régularisation de la solution numérique au cours du temps. A cet effet, on calcule la régularité Sobolev (voir Figure 1) du signal numérique en adoptant les techniques proposées par Mallat [Mal98]. On reprend la méthode utilisée dans Abounouh, Al Moatassime, Chehab, Dumont et Goubet [AboAlmChehDumGou08] pour les équations de Schrödinger non linéaires, forcées et faiblement amorties.

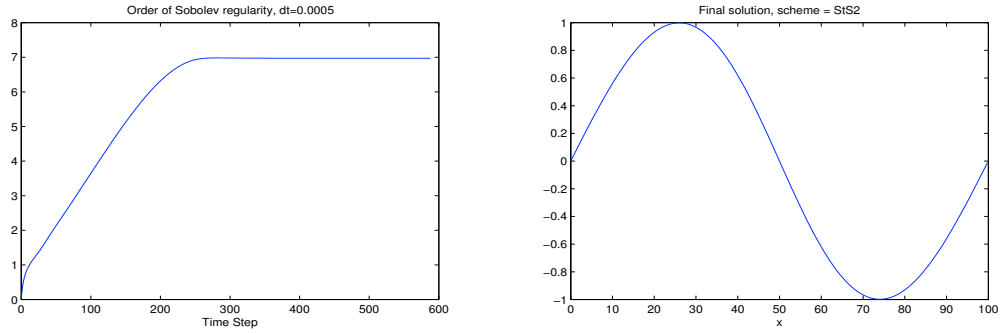



FIGURE 1 – $\hat{u}_k(0) = \dfrac{1}{(1+|k|)}$ si $k$ est paire, 0 si $k$ est impaire, $\gamma_k = 1, \forall k, f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

**Remarque 4.** *La propriété de régularisation est un préalable au développement des méthodes multiniveaux pour capturer la dynamique pour les grands temps, (cf. [AboAlmChehDumGou08], [CalChehLamZah09]).*

**iii- Calcul de solutions stationnaires, de solutions périodiques en temps**
Nous montrons numériquement que l'équation possède des solutions stationnaires (voir Figure 2) et des solutions périodiques en temps, même lorsque $\gamma_k$ tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini. On retrouve ainsi ce que Rosa et Cabral avaient mis en avant dans [CabRosa04] dans le cas faiblement amorti ($\gamma_k = \gamma, \forall k$).

**iv – Comparaison des différents modèles d'amortissement au cours du temps**
Les fonctions de rapport de normes d'énergie de type $G(t)$ semblent être un bon outil pour visualiser au cours du temps les effets des amortissements afin de les comparer. En

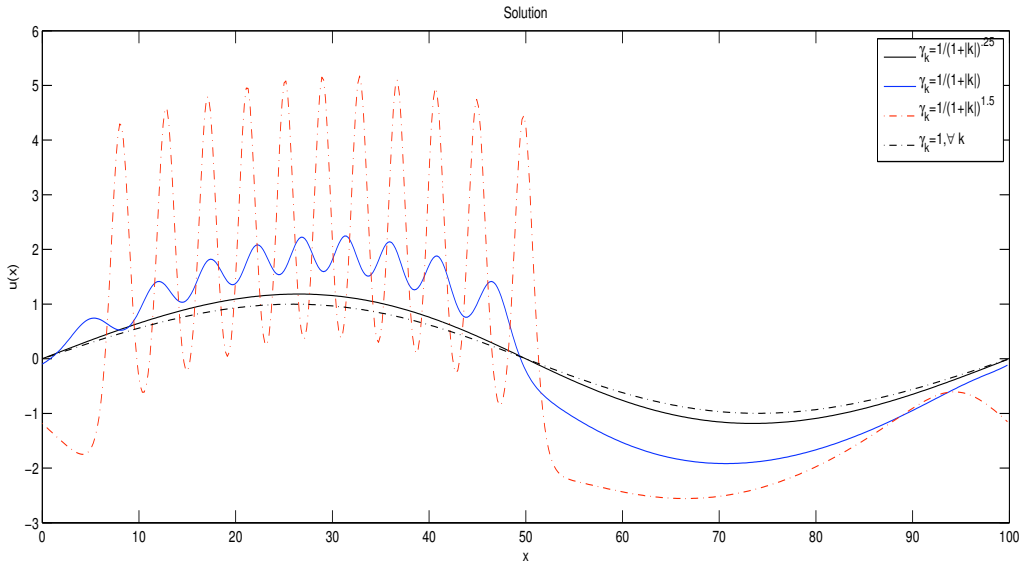



FIGURE 2 – Solutions stationnaires trouvées avec différent $\gamma_k$ pour $u_0(x) = sin(2\pi x/L)$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

reprenant l'approche utilisée pour les amortissements de type $\mathcal{L}_\gamma$, nous comparons, sur un même domaine $[0, L]$ où $L = 20$, les amortissements suivants du plus faible au plus fort (voir Figure 4)

- $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}_\gamma(u)$ $(\gamma_k = \frac{1}{1+|k|})$,
- $\mathcal{L}(u) = \chi_{[a,b]}u$ avec $[a, b] = [0, L/2] \subset [0, L]$,
- $\mathcal{L}(u) = u$,
- $\mathcal{L}(u) = -\mu\partial_x^2 u$ $(\mu = .1)$,
- $\mathcal{L}(u) = \nu \displaystyle\int_0^t \frac{u_t}{\sqrt{t-s}} ds$ $(\nu = .1)$,
- $\mathcal{L}(u) = -\mu\partial_x^2 u + \nu \displaystyle\int_0^t \frac{u_t}{\sqrt{t-s}} ds$ $(\mu = .1, \nu = .1)$.

Dans les deux dernier cas et pour $\mu = 0$, l'opérateur $\mathcal{L}$ est non local en temps ou en espace et son traitement numérique est effectué en mettant en œuvre les schémas proposés par F. Dubois [Dub01, DubGalPoi10] (voir Figure 3).

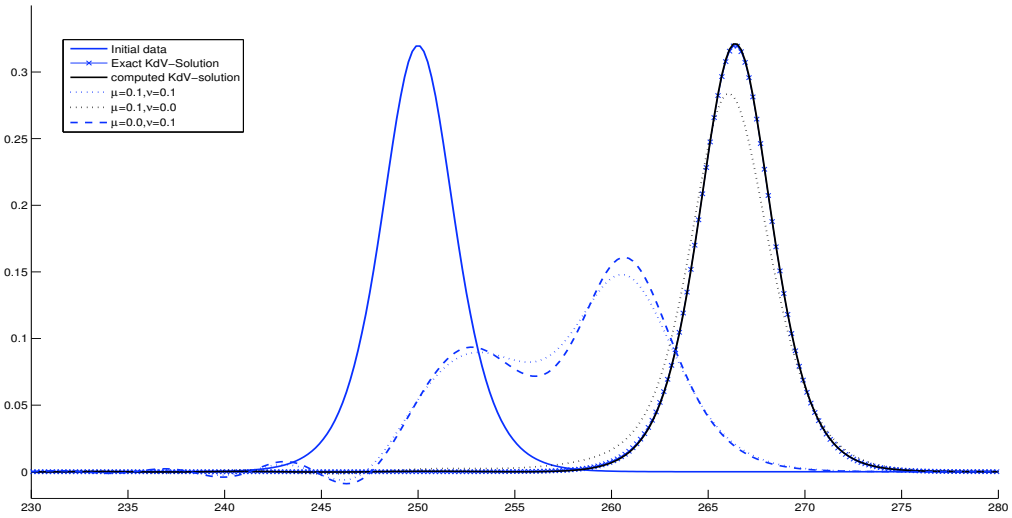



FIGURE 3 – $T = 10, N = 2499, 0 < x < 500, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = \alpha, f(x,t) = 0$.

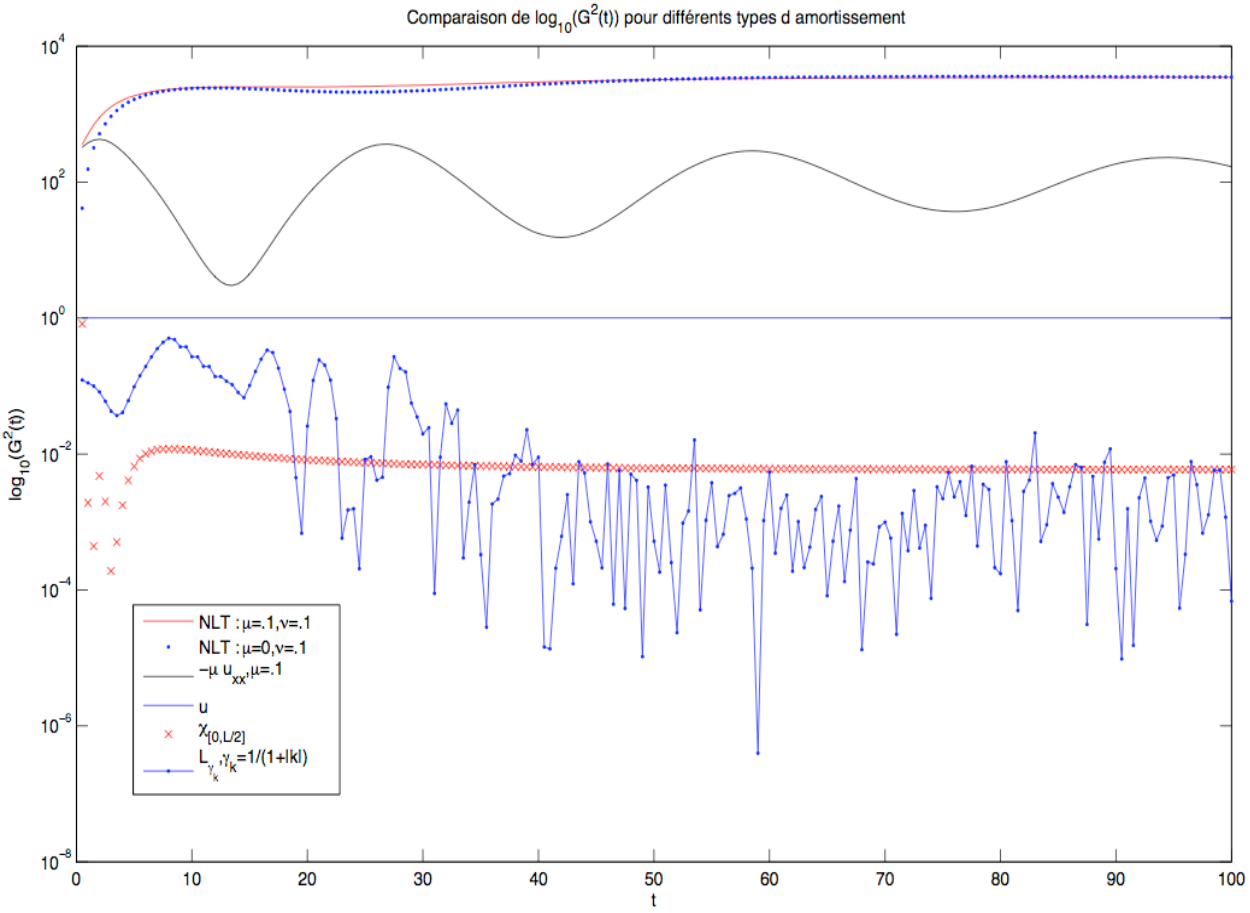



FIGURE 4 – Comparaison de l'opérateur $G^2(t)$ de la solution pour différents types d'amortissement sur $[0, L]$ où $L = 20$.

## Systèmes de Boussinesq amortis

Il a été souvent observé que les variations du fond pouvaient influer sur l'amortissement des vagues de Tsunami : la barrière de corail http://www.risques.gouv.fr/risques/risques-naturels/Tsunami/ ou bien les forêts sous-marines à l'abord des rivages, les mangroves (voir Figure 5) http://www.vliz.be/imisdocs/publications/115329.pdf ; ces barrières sous-marines sont aussi utilisées pour prévenir les effets de la corrosion du littoral (voir Figure 5 et les travaux de P. Azerad *et al.* [AzeBoucIvoIseMoh08, AzeBoucIvoIseMoh08]). Dans ces cas, le relief sous marin amortit l'énergie des vagues ; *a contrario*, dans d'autres situations, on cherche à exploiter cette énergie : certaines sociétés proposent même des projets de barrières sous-marines érectiles pour produire de l'énergie à partir des vagues (voir Figure 6 et http://www.aquamarinepower.com/).

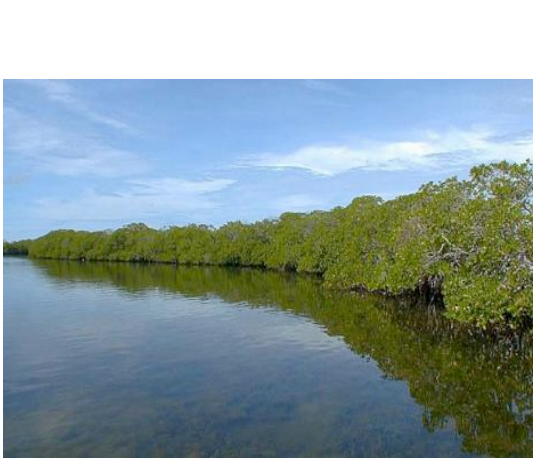


FIGURE 5 – A gauche : exemple de mangroves, Smithsonian Institution.
A droite : lutter contre la corrosion du littoral, Saint Malo, France.

FIGURE 6 – Le dispositif "Oyster" pour produire de l'énergie à partir des vagues.

Pour tenir compte de la variation du fond, on a vu récemment un nombre important d'étude de modèles couplés 1D (voir Tableau 1). Essentiellement, il s'agit de systèmes de Boussinesq de la forme :

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x + (\eta u)_x + a u_{xxx} - b\eta_{xxt} &= 0; \\ u_t + \eta_x + u u_x + c\eta_{xxx} - d u_{xxt} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où $\eta$ est l'élévation de la surface libre, $u$ le champ de vitesse et pour un paramètre $\theta \in [0,1]$, les constantes $a, b, c$ et $d$ sont définies comme :

$$a = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right)\nu, b = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right)(1-\nu), c = \frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)\mu, d = \frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)(1-\mu). \tag{5}$$

| Système | $\theta^2$ | $\nu$ | $\mu$ | Références |
|---|---|---|---|---|
| Boussinesq « classique » | 1/3 | qcq | 0 | [Ami84, Sch81] |
| BBM-BBM | 2/3 | 0 | 0 | [BonaChen98, BonaChenSau04] |
| Bona-Smith | $2/3 \leq \theta^2 \leq 1$ | 0 | $\frac{4-6\theta^2}{3(1-\theta^2)}$ | [BonaSmi76] |
| KdV-KdV | 2/3 | 1 | 1 | [BonaChenSau02, BonaDouMit07, BonaDouMit08] |
| Boussinesq « dissipative » | 0 | 1 | 0 | [DiaDut07] |

TABLE 1 – Exemples des systèmes de Boussinesq en 1D.

Cela a donné lieu à des résultats d'analyse mathématiques (difficiles à obtenir pour le 2D) mais les modèles ne permettent pas de prendre en compte des situations réalistes. Nous proposons dans cette partie de considérer directement des systèmes de Boussinesq 2D à fond variable, ce qui permet d'intégrer la bathymétrie et de considérer des situations plus réalistes.

$$\begin{aligned} &\eta_t + \nabla\cdot(DV) + \nabla\cdot(\eta V) + \nabla\cdot(\zeta V) + \zeta_t + A\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t) \\ &\quad + \nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla(\nabla D\cdot V) + \nabla D\nabla\cdot V\right] + aD^2\nabla(\nabla\cdot(DV)) - bD^2\nabla\eta_t\right\} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 + CD\left[\nabla(\nabla D\cdot V_t) + \nabla D\nabla\cdot V_t\right] + cD^2\Delta\nabla\eta - dD^2\Delta V_t + CD\nabla\zeta_{tt} = 0. \tag{7}$$

Ici $\eta$ est l'élévation de la surface libre, $V$ le champ de vitesse, $D(x,y) + \zeta(x,y,t)$ le fond, les constantes suivantes

$$A = \nu\widehat{a} - (1-\nu)\widehat{b}, \qquad B = -\widehat{b}, \qquad C = \widehat{c},$$

où

$$\widehat{a} = \left(\theta - \frac{1}{2}\right), \qquad \widehat{b} = \frac{1}{2}\left((\theta-1)^2 - \frac{1}{3}\right), \qquad \widehat{c} = (\theta - 1) \qquad \text{et} \qquad \widehat{d} = \frac{(\theta-1)^2}{2}.$$

Lorsque le fond est plat ($D(x,y)+\zeta(x,y,t)=1$), ces équations se simplifient en

$$\eta_t + \nabla\cdot V + \nabla\cdot(\eta V) + a\Delta\nabla\cdot V - b\Delta\eta_t = 0 \tag{8}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 + c\Delta\nabla\eta - d\Delta V_t = 0. \tag{9}$$

On présente dans le Tableau 2 différents systèmes de Boussinesq en 2D.

| Système | $\theta^2$ | $\nu$ | $\mu$ | Références |
|---|---|---|---|---|
| BBM-BBM | $2/3$ | 0 | 0 | [Chen09, ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10] |
| Bona-Smith | $2/3 \leq \theta^2 \leq 1$ | 0 | $\frac{4-6\theta^2}{3(1-\theta^2)}$ | [ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10] |
| Boussinesq « général » | $0 \leq \theta^2 \leq 1$ | qcq | qcq | [ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau10] |

TABLE 2 – Exemples des systèmes de Boussinesq en 2D.

Chen, Goubet, Dougalis, Mitsotakis et Saut ont considérés des modèles 2D à fond plat ([ChenGou09, DouMitSau07]) puis à fond variable ([Chen09, DiaDut07, Mit09]), d'autre part Dutykh, Katsaounis et Mitsotakis ont développé un code en volumes finis pour le système de Boussinesq à fond variable en 1D ([DutKatMit11]) et Mitsotakis *et al.* en éléments finis de type Galerkin (en utilisants des B-splines [DouMitSau07]).

Nous proposons ici de développer un solveur éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec FreeFem++ [HecPioLehOht10]. L'adéquation de la discrétisation éléments $\mathbb{P}_1$ a été établie par Walkley et Berzins [WalBer02]. L'avantage de FreeFem++ est que l'on peut exporter facilement des données bathymétriques et donc envisager des simulations plus réalistes.
Ces calculs ont été effectué sur deux plates forme de l'UPJV (cf. Table 3) :

| Machine | Marque | CPU | Mémoire | Fréquence | Nb processeurs |
|---|---|---|---|---|---|
| Lebesgue | DELL power edge | Xeon PIII | 18 Go de RAM | 2.5 Ghz | 4 |
| Léonardo | SGI-ALTIX 450 | Itanium 2 | 72 Go de RAM | 1.7 Ghz | 36 |

TABLE 3 – Résumé des caractéristiques principales des machines utilisées pour les tests numériques.

**Cas du fond plat**

L'utilisation du logiciel FreeFem++ simplifie la construction du domaine, les choix des éléments finis, la définition des conditions aux bords, la technique d'adaptation de maillage (voir Figure 7) (on remarque que dans ce cas là, on a des résultats comparables que si on n'utilise pas cette méthode), ...

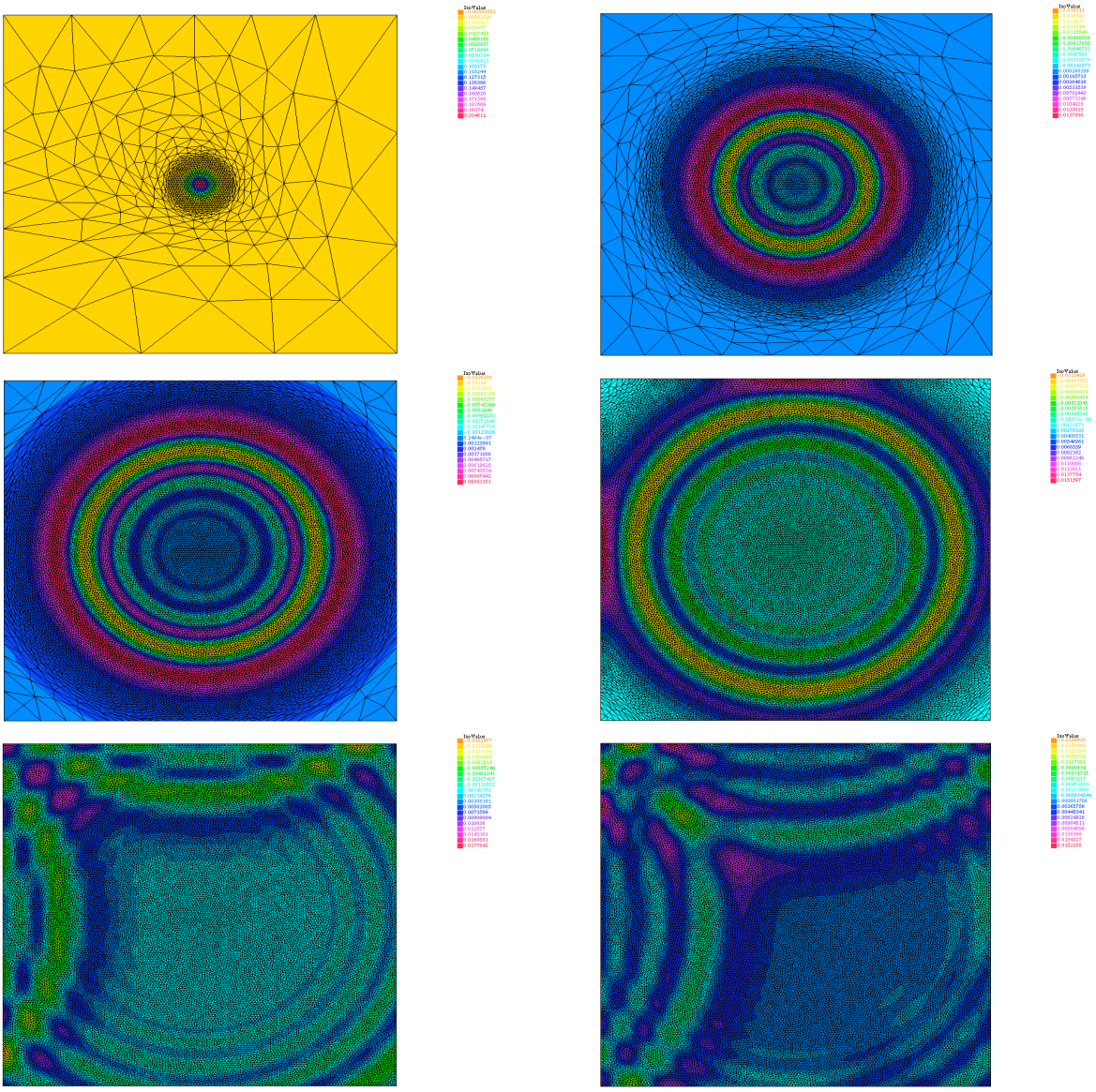


FIGURE 7 – Affichage de la solution et du maillage du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0.1, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_adaptmesh.avi.

Nous avons développé un code éléments finis en FreeFem++. Dans un premier temps, nous nous restreignons au cas du fond plat. Nous validons le code en comparant les résultats obtenus avec ceux (récents) de Mitsotakis
[DouMit08, DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10] (voir Figure 8).

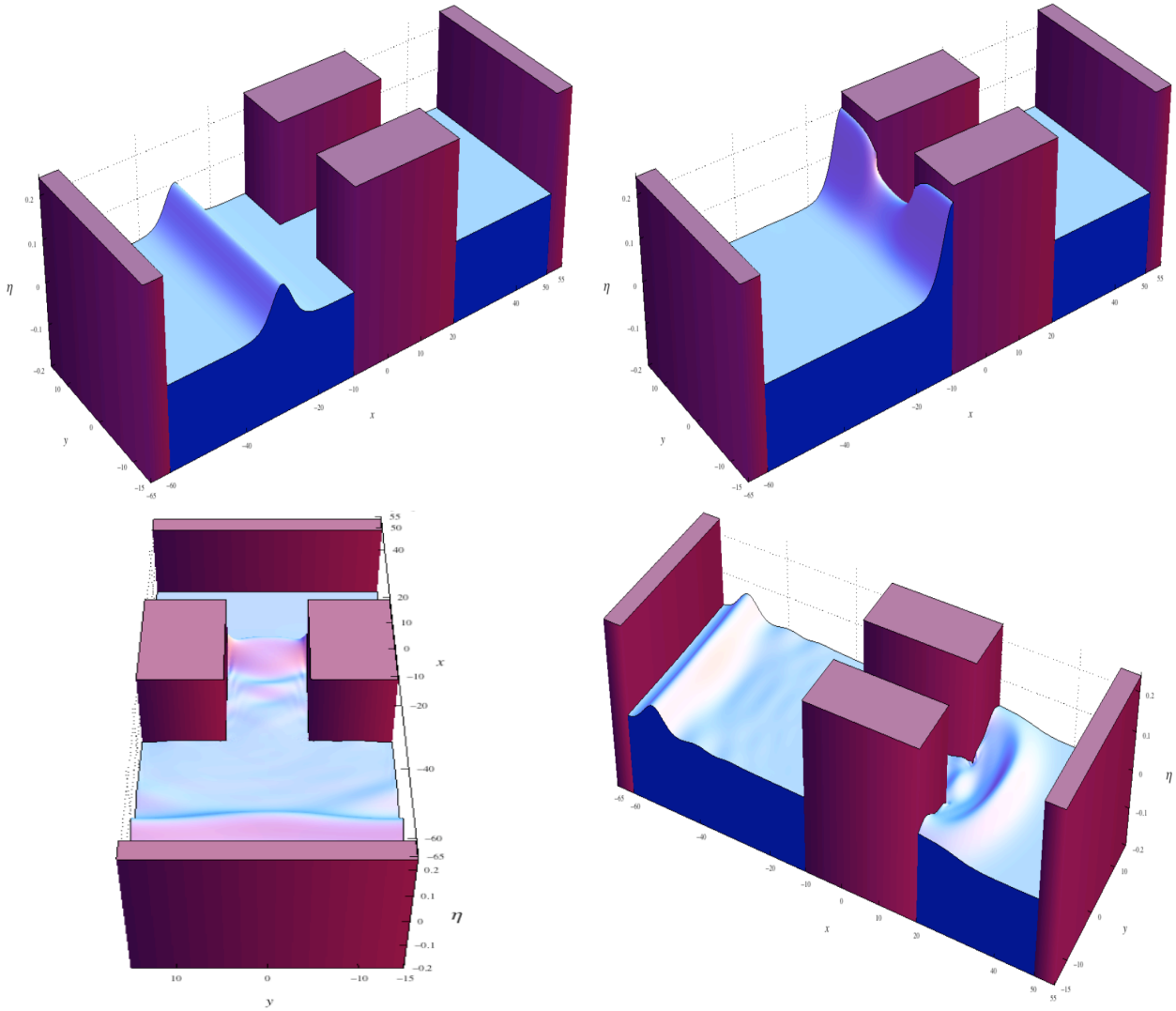


FIGURE 8 – Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à travers un port pour les différents temps $t = \{0, 19, 49, 60\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_HARBOR_Soliton.avi.

**Cas du fond variable en espace**

On montrera dans cette partie des exemples simples du système de Boussinesq à fond variable ($D(x,y)$) (voir Figures 10), on s'intéressera, dans ces cas, au comportement des énergies potentielles, cinétiques et totales obtenues par Dias et Dutykh [DiaDut09]

$$E_c = \frac{1}{2}\rho \int_\Omega \left( \int_{-D(x,y)}^{\eta} |V|^2 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E_p = \frac{1}{2}\rho \cdot g \int_\Omega \eta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E_t = E_c + E_p$$

où $\rho$ est la masse volumique de l'eau, $g$ est la force de gravité.
On va comparer (cf. Figure 9), au premier temps et dans un même domaine $\Omega = ]-40, 40[\times]-1, 1[$, ces énergies avec plusieurs types de fonds simples :

- fond "plat" : $D(x,y) = 1$,
- fond "marche" : $D(x,y) = \frac{1}{4}\left(\tanh(x) - 3\right)$,
- fond "bosse" : $D(x,y) = 1 - .5 \cdot e^{-x^2/10}$.
- fond "multi bosse : $D(x,y) = -0.8 - b_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\ell}x\right)$ où $\ell = \frac{1+\varepsilon\alpha}{4}$, $\alpha = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$, $b_0 = 0.2$.

On remarque premièrement que dans le cas d'un fond plat, on a la conservation de l'énergie tandis que dans le cas d'une marche on constate son influence sur la croissance de l'énergie potentielle et finalement dans le cas d'une simple bosse ("bump") l'énergie décroît alors que dans le multi bosse, elle varie peu.

D'autre part, on remarque dans la Figure 10, l'influence de la bathymétrie sur l'onde solitaire ; où, après interaction de l'onde avec la marche, on a la génération d'une onde qui ressemble à un soliton et qui se propage dans le sens inverse, tandis que la longueur d'onde de la vague diminue et son amplitude augmente.

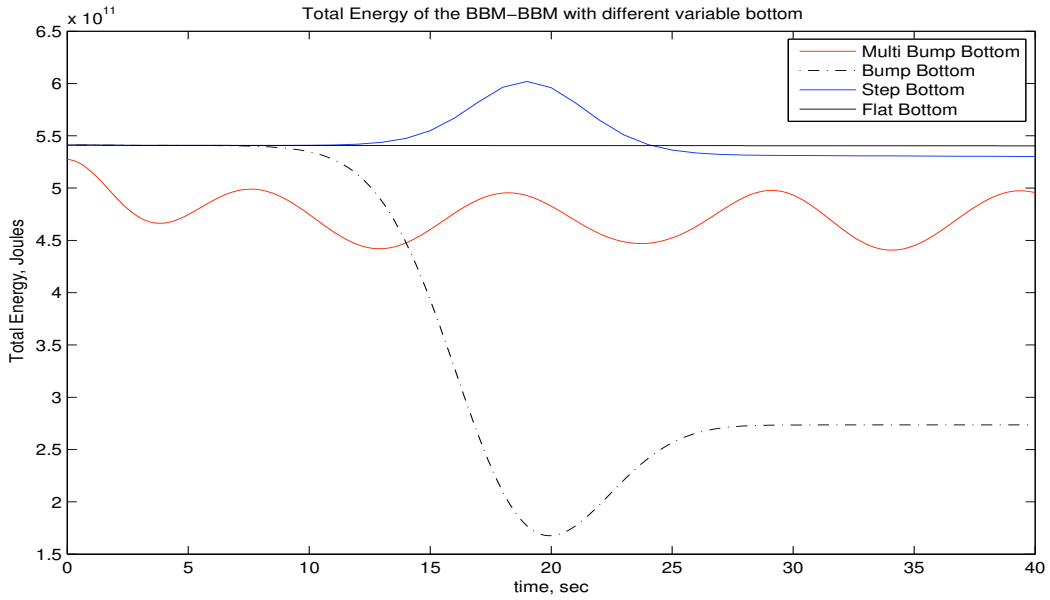



FIGURE 9 – Energie totale avec différents types de fonds.

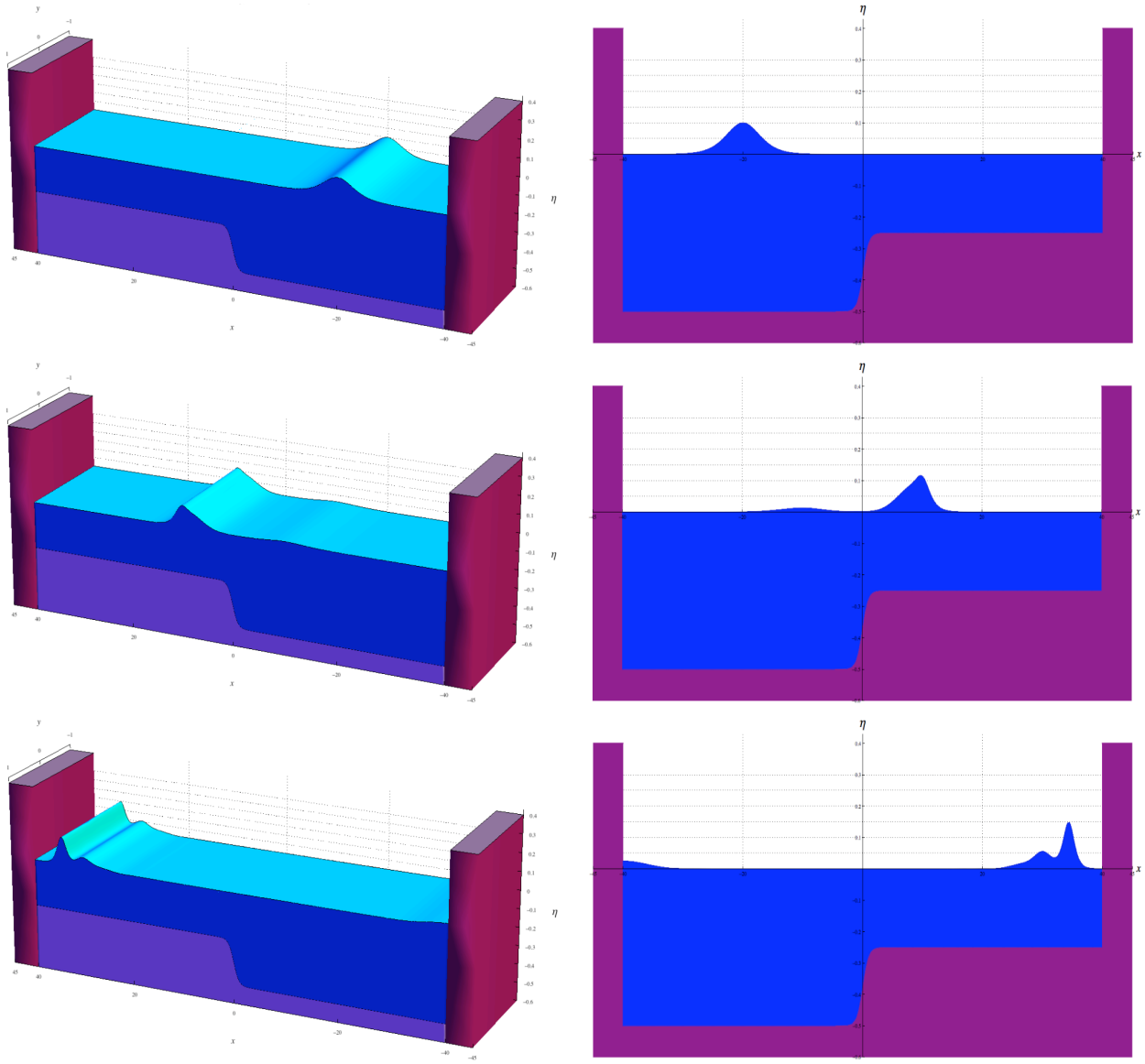


FIGURE 10 – A gauche la solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ et à droite sa coupe en $(y = 0)$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton.avi et sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton_Cut_y_0.avi.

### Cas du fond dynamique

On testera notre code sur des exemples simples pour le système de Boussinesq à fond dynamique $(D(x,y)+\zeta(x,y,t))$ (Figures 13), en tenant compte des énergies potentielles, cinétiques et totales (11).

On considère, au premier temps dans un domaine $\Omega = ]-40,40[\times]-40,40[$ avec des conditions aux limites Bi-périodique, un fond dynamique simple :

$$DB1 : \qquad h(x,y,t) = D(x,y) - \zeta(x,y,t) = .5 + .1e^{-(x^2+y^2)/25}\sin(t/2)$$

où on arrête l'évaluation du fond à $t = 3s$, on tracera le maximum de la solution à $t = 100s$ dans la Figure 12.

On remarque que le déplacement du fond influe sur la croissance de l'énergie potentielle qui est nulle au début puisque qu'on part de l'équilibre et après la stabilisation du fond on remarque l'énergie potentielle reste à peu près constante.

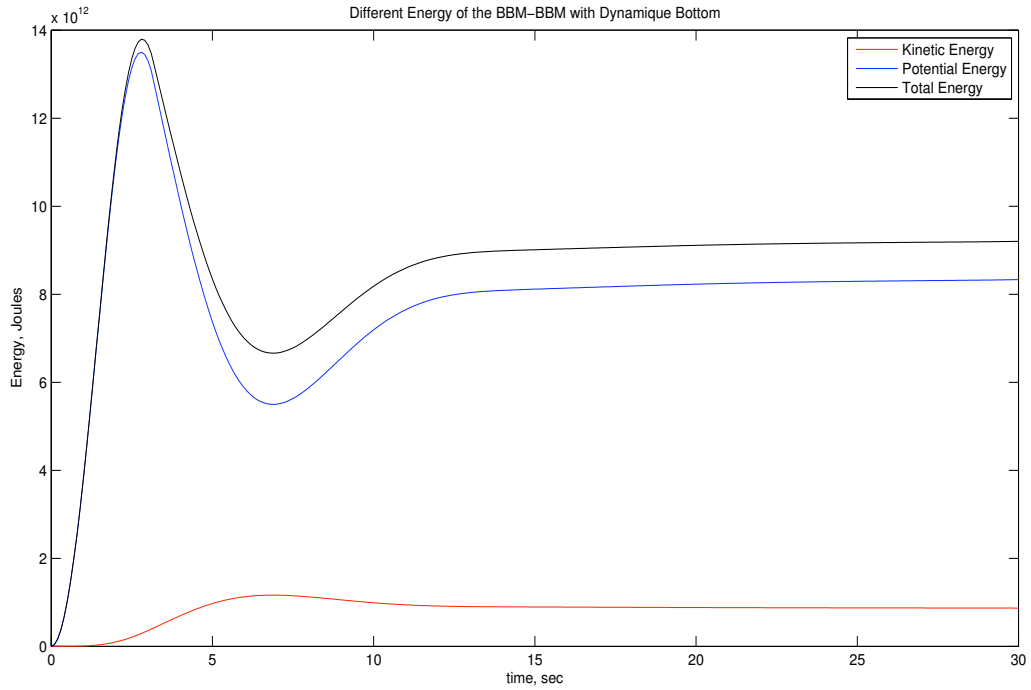



FIGURE 11 – Energie cinétique, potentielle et totale pour le fond dynamique $DB1$.

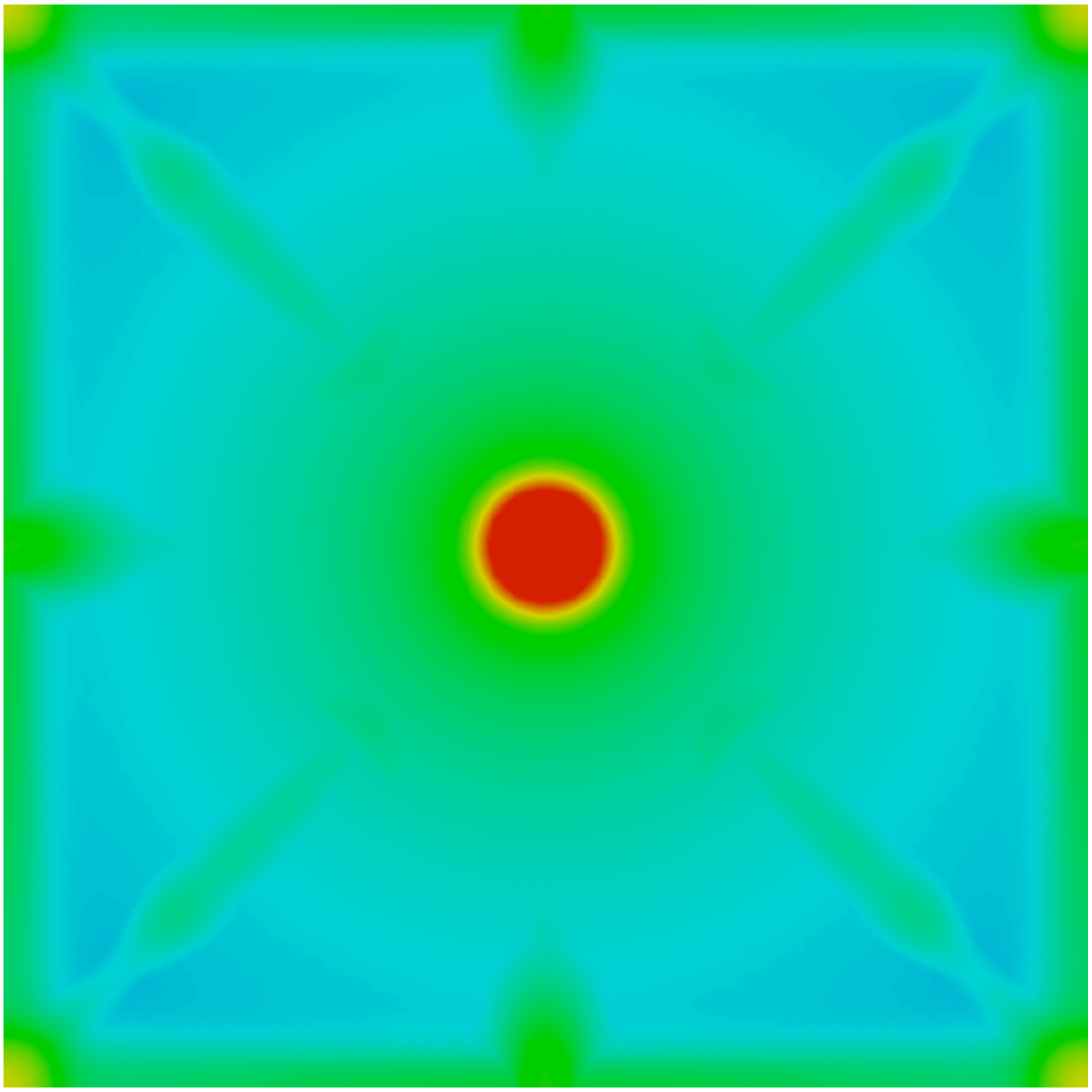


FIGURE 12 – Maximum de la solution à $t = 100s$.

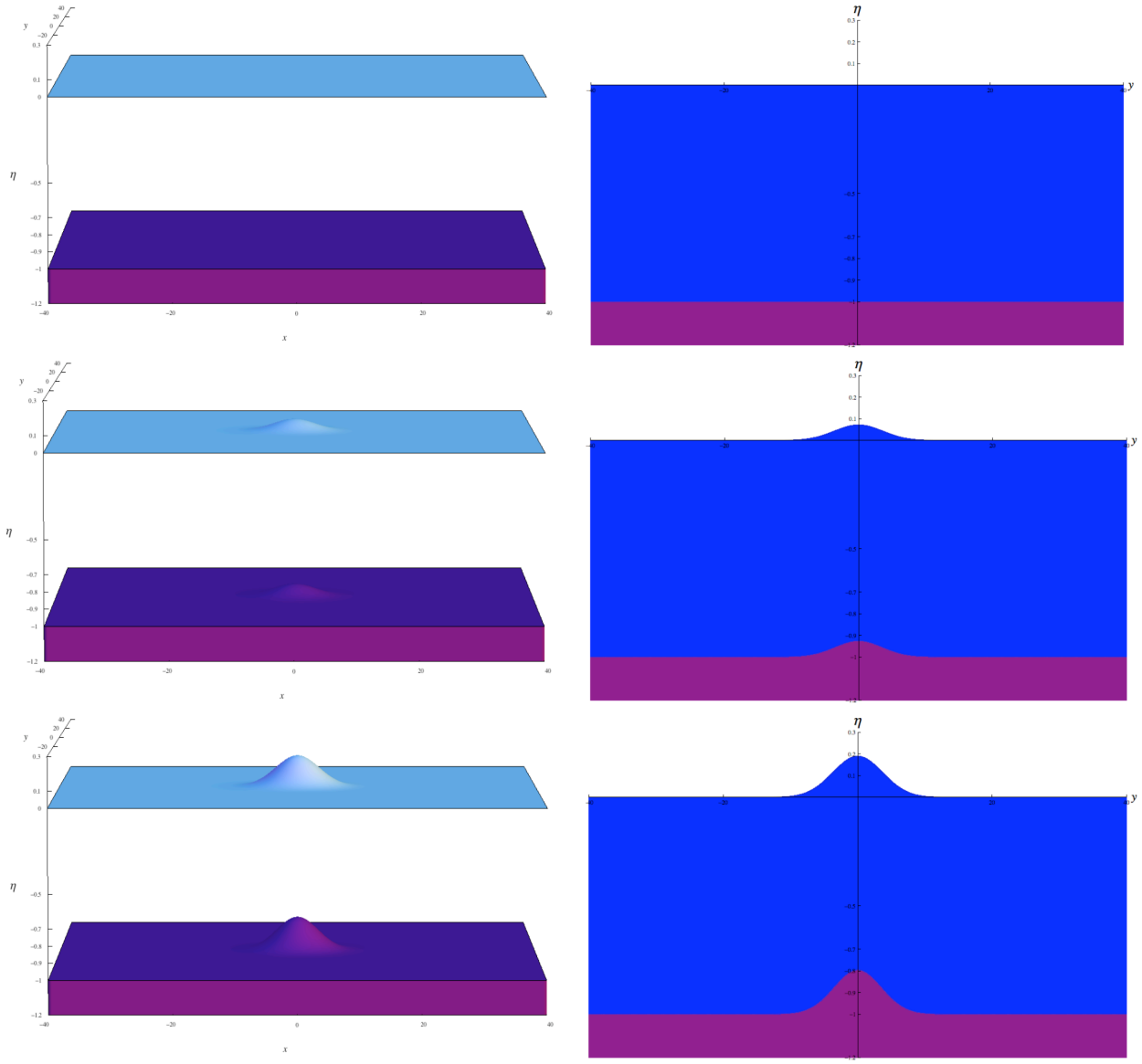


FIGURE 13 – A gauche la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique et à droite sa coupe en $(x = 0)$ pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_PBC.avi et sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_Cut_x_0_PBC.avi.

**Cas avec des données réalistes**

On montrera l'utilité de FreeFem++ pour le système de Boussinesq en construisant un domaine à travers une photo prise sur Google Earth® (cf. Figures 14 et 15). Dans la Figure 16, on représente le maximum de la propagation de la solution à $t = 1000sec$ en utilisant des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$.

FIGURE 14 – La mer Méditerranée après assemblage avec Photoshop®.

FIGURE 15 – Le maillage généré par FreeFem++ pour la mer Méditerranée.

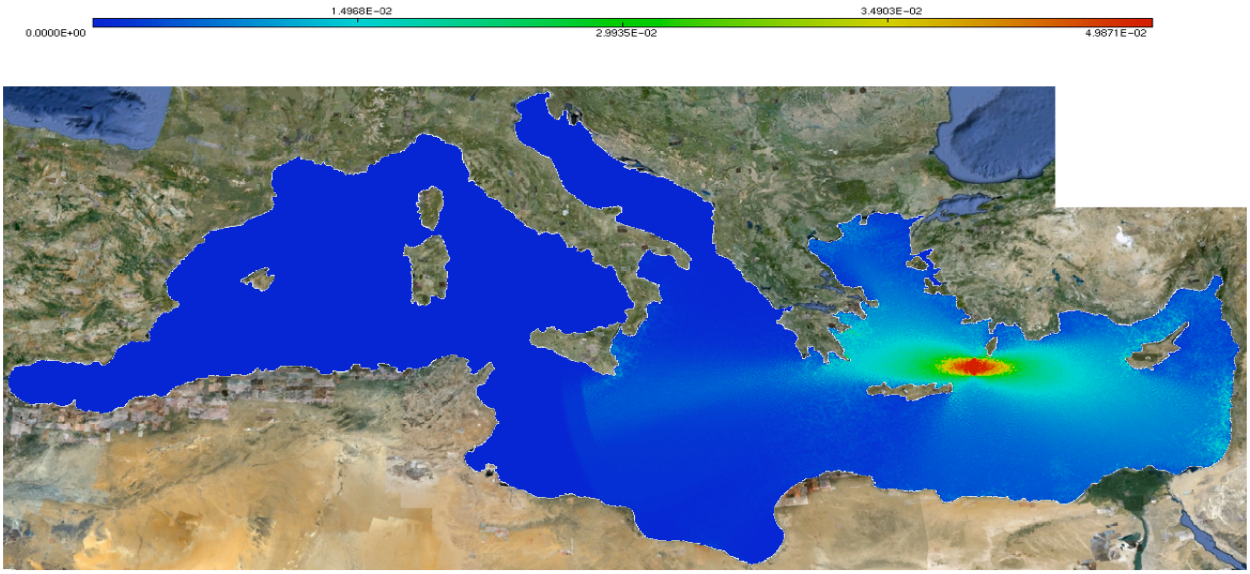



FIGURE 16 – Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 1000sec$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_MAX_P1.avi.

Cette dernière méthode de génération de maillage à partir d'une photo présente un problème d'une part avec le non lissage du bord qui nous cause des problèmes avec la génération du maillage en utilisant la méthode d'adaptation de maillage dans certaines endroits (cf. Figure 17) et d'autre part, on est limité à utiliser un seul type de conditions aux limites (Dirichlet homogène) le long de tout le bord du domaine.

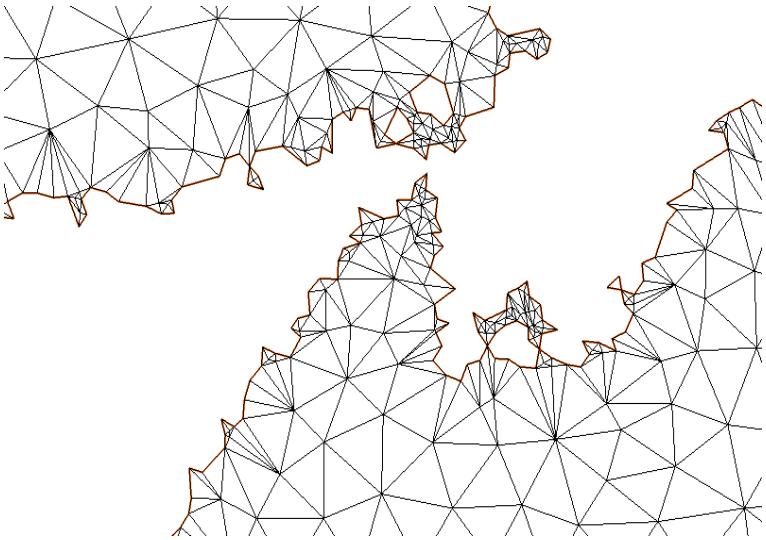


FIGURE 17 – Le problème du non lissage aux bords.

Ce problème est résolu avec le script qui est fait par Olivier Pantz [Pan11] en utilisant la méthode de level-set pour lisser le bord, ce script permet à travers des données (xyz)

de la bathymétrie d'une zone de la terre (téléchargées du site http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd_designagrid.html, en tenant compte des degrés de longitude et de latitude de la terre cf. Figure 18), de générer un maillage de la zone où l'amplitude est nulle tout en utilisant la méthode de level-set pour lisser le bord (cf. Figure 19). De plus, on peut à travers ce script, d'une part utiliser la méthode de l'adaptation de maillage sans avoir des problèmes de génération de maillage (cf. Figure 20) et d'autre part, avoir des labels différents pour chaque type de bord, ce qui facilite l'utilisation des différents types de conditions aux limites pour $\eta, u$ et $v$ (Neumann homogène en pleine mer et Dirichlet homogène sur les côtes).

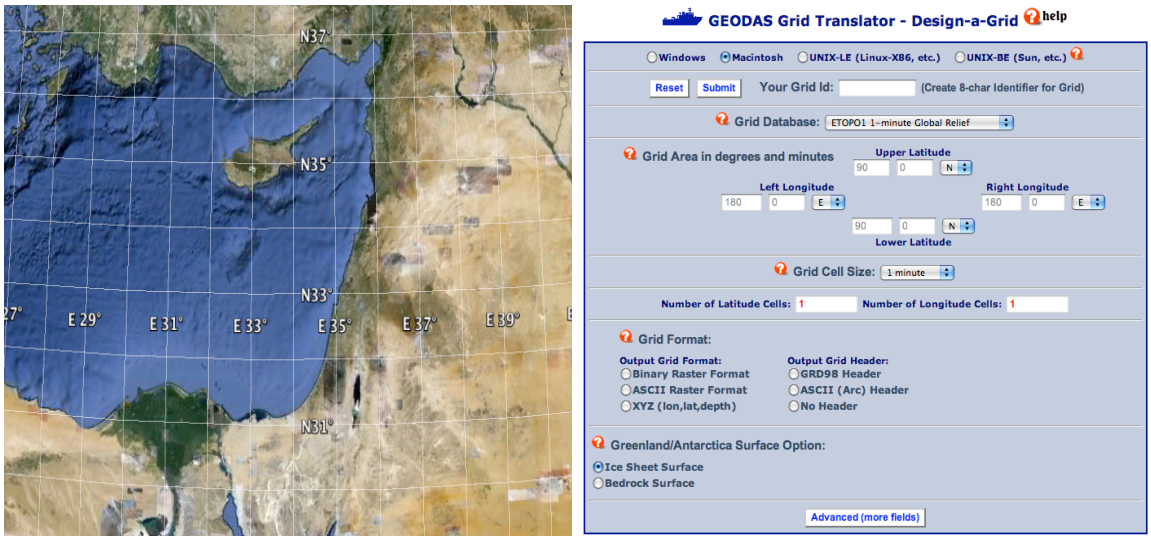



FIGURE 18 – Les lignes de longitude et de latitude de la terre (à gauche).
Le site de NOAA (à droite).

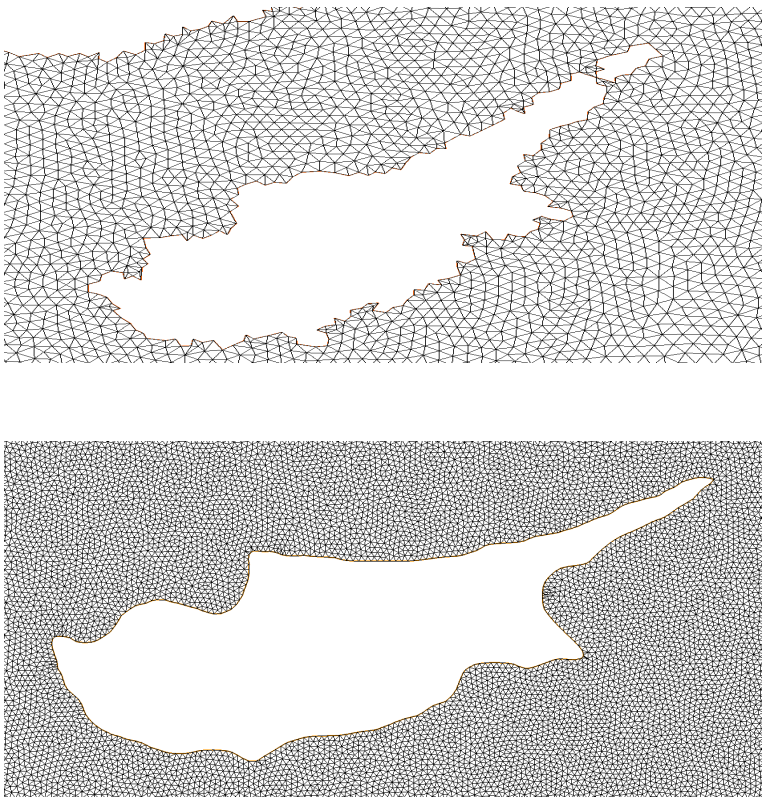


FIGURE 19 – Le maillage autour de Chypre avant et après le lissage des bords en utilisant le script d'Olivier Pantz.

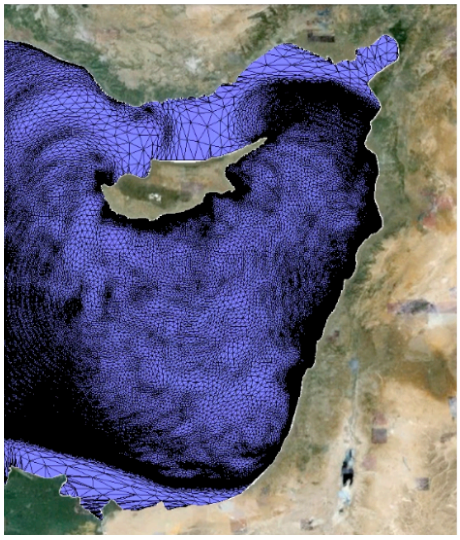
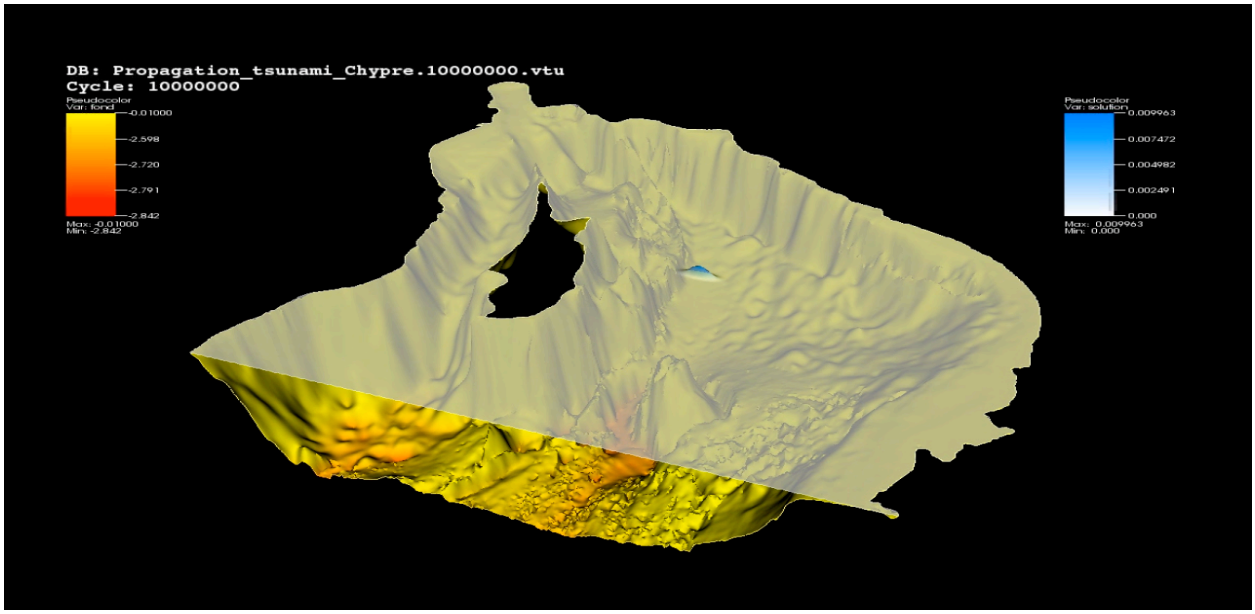


FIGURE 20 – Adaptation de maillage autour de Chypre après le script d'Olivier Pantz. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/chypre_adaptmesh.avi.

On présente dans les Figures 21 et 22 la propagation d'une onde générée au large de Chypre dans la Méditerranée qui ressemble à celle générée à partir d'un séisme.



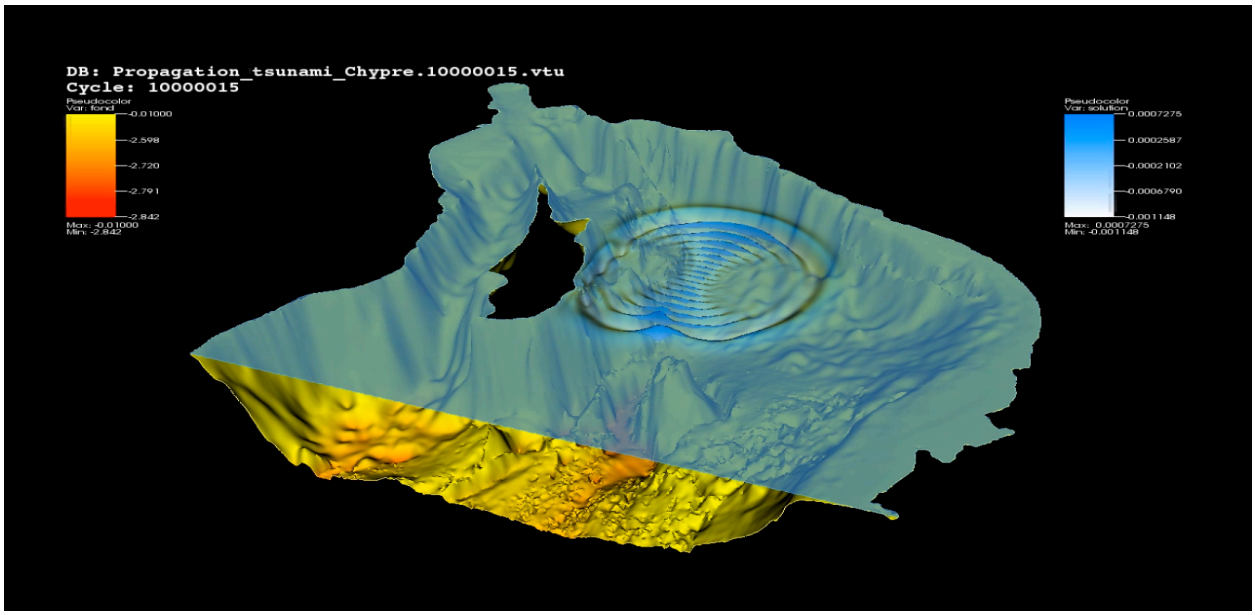




FIGURE 21 – Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 0$ et $75sec$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/propagation_tsunami_Chypre_P1.mpeg.

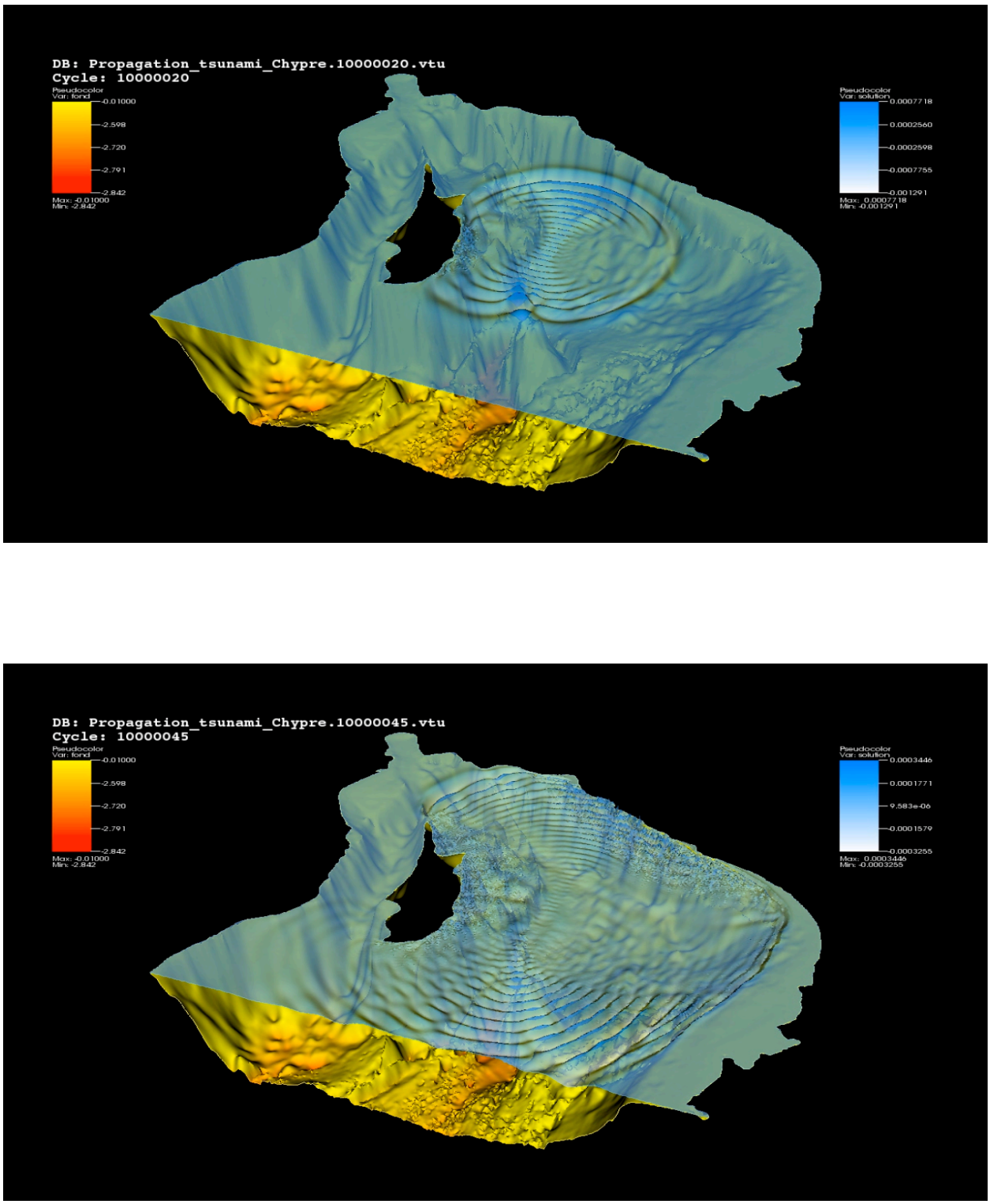



FIGURE 22 – Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 100$ et $225sec$.

## Organisation de la thèse

Dans le premier chapitre, afin de mieux introduire la physique des problèmes considérés, nous effectuons l'obtention des équations de KdV telles que réalisée dans Temam-Miranville [MirTem05] puis de Boussinesq 2D à fond variable en utilisant des techniques de Mammeri [Mam08] et Mitsotakis [Mit09].

Ensuite, dans le second chapitre, nous présentons le travail effectué sur l'équation de KdV amortie et forcée. On vérifiera ce qui était fait dans la littérature pour ce type d'équations, en particulier, on abordera le comportement asymptotique des solutions (solutions stationnaires, solutions périodiques, régularité de Sobolev) avec des opérateurs d'amortissement qui sont aussi faible que ceux proposés avant.

Dans le chapitre 3 sont exposés les résultats numériques obtenus sur Boussinesq 2D : nous vérifions tout d'abord que les simulations fournies par notre code numérique sont en concordance avec les résultats de la littérature récente, notamment les travaux de Dougalis, Mitsotakis et Saut [DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10]. Cela établit l'adéquation de la discrétisation éléments finis choisie. Dans un second temps, nous considérons le modèle à fond variable et le testons dans diverses situations, simples d'abord, puis, plus réalistes ensuite avec la simulation d'un Tsunami sur la partie Est de la méditerranée, en utilisant la bathymétrie.

Une partie indépendante du sujet de thèse vient compléter ce mémoire. Il s'agit d'un article [DerFacGosImbSadSar11], co-écrit avec Erwan Deriaz, Bruno Després, Gloria Faccanoni, Kirill Pichon Gostaf, Lise-Marie Imbert-Gérard et Remy Sart, et regroupant un travail réalisé au cours du CEMRACS 2010. Il porte sur l'évaluation de l'outil FreeFem++ sur la base des équations magnétiques résultantes de la fusion thermonucléaire du plasma dans un Tokamak (*TOroidalnaya KAmera i MAgnitnaya Katushka*) dans le context du projet ITER (http://www.iter.org).

## Conclusion et perspectives

La famille d'équations de KdV faiblement amortie que nous avons présentée ici permet de considérer des amortissements plus faibles que ceux étudiés dans [Ghi88, Ghi94, Gou00, GouRosa02] dans le sens que, quand $\gamma_k \to 0$ quand $|k| \to +\infty$,

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |u|_\gamma \leq c|u|_{L^2} \forall u \in L^2 \text{ et } \nexists d > 0 \text{ t.q. } d|u|_\gamma \geq |u|_{L^2} \forall u \in L^2,$$

pour lequel une propriété de régularisation asymptotique a été démontrée. Les illustrations numériques montrent que l'amortissement est toujours présent dans la norme de l'énergie, le problème principale étant que nous n'avons pas un contrôle uniforme sur le taux d'amortissement. En revanche, et comme dans le cas d'un faible amortissement considéré par Cabral et Rosa [CabRosa04] (voir aussi [AboAlmCalCheh11]), nous mettons en évidences numériquement, l'existence des solutions stationnaires et des solutions périodiques en

temps, ce qui signifie des dynamiques non trivial en grands temps. Comme perspectives possibles de ce présent travail, nous proposons :

1. L'analyse mathématique du comportement pour les grands temps de (2) - (3) reste encore à faire ; cela présente des difficultés techniques en raison de la non injection de $H_\gamma$ dans $L^2$ quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$, il est alors utile de produire tout d'abord des résultats numériques.
2. Nous pouvons considérer de telles équations de KdV amorties quand les conditions aux limites ne sont pas périodiques. Il suffit de développer la solution dans une base propre (Hilbert) de polynômes orthogonaux $p_k$ par rapport aux poids pondérés des produits scalaires $(.,.)_\omega$ dans $L^2$. Nous avons alors

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k p_k(x),$$

où $\hat{u}_k = \dfrac{(u,p_k)_\omega}{(p_k,p_k)_\omega}$ et nous définissons l'opérateur linéaire d'amortissement $|u|_\gamma$ comme

$$\mathcal{L}_\gamma(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k p_k(x).$$

Plus largement, l'étude du comportement des grands temps des équations comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_\gamma(u) + F(u) = 0,$$

avec $Re(F(u),u)_\omega = 0$ et $|u|_\gamma$ défini comme ci-dessus, peut être traitée suivant la même approche. Par exemple les équations non linéaire amortie de Schrodinger comme présenté dans [AboAlmChehDumGou08] peuvent être considérées.

3. D'un point de vue numérique, l'amortissement lorsqu'il est traité implicitement dans un schéma en temps numérique, a une propriété de stabilisation. L'expression de Fourier de $|u|_\gamma$ permet d'étudier d'une façon précise l'effet de l'amortissement par ensemble de fréquences : cela peut être un premier pas avant la construction des opérateurs de filtrage pour stabiliser numériquement les schémas sans détruire la consistance, comme c'était fait par exemple dans [ChehCos04] pour des équations paraboliques non linéaires.
4. La fonction $G(t)$ introduite pour mesurer les effets de l'amortissement au cours du temps dans le cas de l'opérateur $\mathcal{L}_\gamma$ semble être un bon outil pour comparer l'effet de différents opérateurs d'amortissement sur de longue périodes temporelles. Nous avons ainsi pu observer que les amortissements non locaux en temps, tels que considérés dans [ChenDumDupGou10], sont plus forts que celui dissipatif classique $(\mathcal{L}(u) = -\mu\partial_x^2 u)$ ; une analyse plus fine de la fonction $G(t)$, à l'aide par exemple d'une analyse en fréquences en temps, permettrait de quantifier plus précisément cette propriété.

Les travaux de la partie KdV ont fait l'objet de l'article [ChehSad11].

Dans le cas du système de Boussinesq à fond plat, nous avons validé nos codes de FreeFem++ et établit l'adéquation du choix des éléments finis en comparant les résultats avec ceux récent des Mitsotakis *et al.* Sur cette base, nous avons intégré la variation du fond en espace et/ou en temps. Ceci nous a permis de mettre en évidence une influence de la forme du fond sur l'énergie de la vague : dans le cas d'une simple bosse ("bump") l'énergie décroît alors que dans le multi bosse, elle varie peu. Nous pensons développer cet aspect. Idéalement, il faudrait pouvoir déterminer d'une manière "optimale" (dans le sens de la minimisation de l'énergie) un profil du fond avec certaines contraintes comme une forme globale de marche (à l'approche du rivage). L'ensemble de programmes FreeFem++ qu'on a développés permet de réaliser ceci d'une manière assez souple et constitue donc un outil d'aide à la modélisation dans ces perspectives.

S'agissant de la simulation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, l'environnement informatique et numérique que nous avons développé permet d'intégrer des données réalistes (géographie et bathymétrie) dans un cadre relativement simple. Pour autant l'obtention des résultats réalistes nécessite d'intégrer d'autres éléments : tout d'abord, les conditions de Neumann homogène sur la partie de la frontière en mer ne sont pas réalistes puisqu'elles génèrent des réflexions artificielles : il faudrait, dans cette région, envisager par exemple des conditions aux limites absorbantes (ceci est un problème difficile). Ensuite, les conditions de Dirichlet homogène sur les autres parties du bord ne tiennent pas compte des possibilités d'envahissement des terres par les vagues (phénomène du Run-up) : on pourrait dans ce cas utiliser des conditions de types "éponges" (sponge layer) (voir [LopPeTra11]) ; ajoutons que les simulations de Runp-up sont en général réalisés en utilisant des discrétisations en Volumes finies (voir [DutKatMit11]) et il faut développer une passerelle éléments finies - volumes finis conjuguée avec un couplage de modèle.

Une validation de ces solveurs pourrait passer par les simulations des *Tsunamis* du Pacifique pour lesquels on dispose des données et en particulier de modèles réalistes de générations de *Tsunami* par séisme sous marin ([DutMitChuSho11, DutMitGarDia11, Mit09] ).

Néanmoins, les résultats présentés ici constituent un premier pas vers ces développements futurs.

# Bibliographie

[AboAlmCalCheh11] Mostafa Abounouh, Hassan Al Moatassime, Caterina Calgaro et Jean-Paul Chehab. A numerical scheme for the long time simulation of a forced damped KdV equation. *In preparation*. xxv

[AboAlmChehDumGou08] Mostafa Abounouh, Hassan Al Moatassime, Jean-Paul Chehab, Serge Dumont et Olivier Goubet. Discrete schrödinger equations and dissipative dynamical systems. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 7(2) :211-227, 2008. PDF. v, v, xxvi

[Ami84] Charles J. Amick. Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesq system of equations. *J. Diff. Eqns.*, 54 :231-247, 1984. PDF. ix

[AzeBoucIvoIseMoh08] Pascal Azerad, Frederic Bouchette, Benjamin Ivorra, Damien Isebe et Mohammadi. Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 74, pp. 1262-1277, 2008. PDF. viii

[AzeBoucIvoIseMoh08] Pascal Azerad, Frederic Bouchette, Damien Isebe et Bijan Mohammadi. Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, Vol. 55, pp. 35-46, 2008. PDF. viii

[BonaChen98] Jerry L. Bona et Min Chen. A Boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves. *Physica D*, 116 :191-224, 1998. PDF. ix

[BonaChenSau02] Jerry L. Bona, Min Chen et Jean-Claude Saut. Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I : Derivation and linear theory. *Journal of Nonlinear Science*, 12 :283-318, 2002. PDF. ix

[BonaChenSau04] Jerry L. Bona, Min Chen, et Jean-Claude Saut. Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media : II. the nonlinear theory. *Nonlinearity*, 17, no3, 925-952, 2004. PDF. ix

[BonaDouMit07] Jerry L. Bona, Vassilios A. Dougalis and Dimitrios E. Mitsotakis. Numerical solution of KdV-KdV systems of Boussinesq equations I :

The numerical scheme and generalized solitary waves. *Math. Comput. Simulation*, 74 :214-228, 2007. PDF. ix

[BonaDouMit08] Jerry L. Bona, Vassilios A. Dougalis and Dimitrios E. Mitsotakis. Numerical solution of Boussinesq systems of KdV-KdV type : II. Evolution of radiating solitary waves. *Nonlinearity*, 21, 2825-2848, 2008. PDF. ix

[BonaSmi76] Jerry L. Bona et Ronald Smith. A model for the two-way propagation of water waves in a channel. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79 :167-182, 1976. PDF. ix

[CabRosa04] Marco Cabral et Ricardo Rosa. Chaos for a damped and forced KdV equation. *Phys. D*, 192, no. 3-4, 265-278, 2004. PDF. ii, v, xxv

[CalChehLamZah09] Caterina Calgaro, Jean-Paul Chehab, Jacques Laminie et Ezzedine Zahrouni. Séparation des échelles et schémas multiniveaux pour les équations d'ondes non-linéaires. *ESAIM Proc., EDP Sci.*, 27, p 180-208, 2009. PDF. v

[Cham09] Julien Chambarel. *Etude des vagues extrêmes en eaux peu profondes.*, 176 p. Thèse : Mécanique et Energétique : Université de Provence, Aix-Marseille 1 : 2009. PDF. i

[ChehCos04] Jean-Paul Chehab et Bruno Costa. Time Explicit Schemes and Spatial Finite Differences splittings. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 20, No. 2, 159-189, 2004. PDF. xxvi

[ChehSad11] Jean-Paul Chehab et Georges Sadaka. Numerical study of a family of dissipative KdV equations. *CPAA*, 2011. xxvi

[Chen09] Min Chen. Numerical investigation of a two-dimensional Boussinesq system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol 23, no4, 1169-1190, April 2009. PDF. x, x

[ChenDumDupGou10] Min Chen, Serge Dumont, Louis Dupaigne et Olivier Goubet. Decay of solutions to a water wave model with nonlocal viscous dispersive term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Volume 27, Number 4, pp. 1473-1492, Août 2010. PDF. ii, xxvi

[ChenGou09] Min Chen et Olivier Goubet. Long-time asymptotic behavior of two-dimensional dissipative Boussinesq systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, Vol 2, no1, 37-53, March 2009. PDF. x, x, x, x

[DerFacGosImbSadSar11] Erwan Deriaz, Bruno Després, Gloria Faccanoni, Kirill Pichon Gostaf, Lise-Marie Imbert-Gérard, Georges SADAKA et Remy Sart. Magnetic Equations with FreeFem++ : the Grad-Shafranov equation & The Current Hole. ESAIM : PROCEEDINGS, Vol. 32, p. 76-94, October 2011. PDF.

xxv

[DiaDut07] Frédéric Dias et Denys Dutykh. Dissipative Boussinesq equations. *C. R. Mécanique*, 335 , 559-583, 2007. PDF. i, x

[DiaDut07*] Frédéric Dias et Denys Dutykh. Dynamics of tsunami waves. *In Book : "Extreme Man-Made and NaturalHazards in Dynamics of Structures", NATO Security through Science Series,* 201 - 224, 2007. PDF. i

[DiaDut09] Frédéric Dias et Denys Dutykh. Energy of tsunami waves generated by bottom motion. *Proc. R. Soc. A*, 465, 725 - 744, 2009. PDF. xiii

[DouMit08] Vassilios Dougalis et Dimitrios Mitsotakis. Theory and numerical analysis of Boussinesq systems : A review. *CRC Press*, pp. 63-110, 2008. PDF. xii

[DouMitSau07] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. On some Boussinesq systems in two space dimensions : theory and numerical analysis. *M2AN*, no. 5, 825-854, Vol 41, 2007. PDF. x, x, x, x, x, xii, xxv

[DouMitSau09] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. On initial-boundary value problems for a Boussinesq system of BBM-BBM type in a plane domain. *AIMS' Journal*, Vol 23, 2009. PDF. x, xii, xxv

[DouMitSau10] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. Boussinesq systems of Bona-Smith type on plane domain : Theory and Numerical Analysis. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 44, no2, pp. 109-135, 2010. PDF. x, x, xii, xxv

[Dub01] François Dubois. Code en fortran, juin 2001. PDF. vi

[DubGalPoi10] François Dubois, Ana-Cristina Galucio et Nelly Point. Introduction à la dérivation fractionnaire ; théorie et applications. *Techniques de l'ingénieur*, Ref AF510, avril 2010. PDF. vi

[Dut07] Denys Dutykh.*Modélisation mathématique des Tsunamis*, 256 p. Thèse : Mathématiques Appliquées : ENS - Cachan : 2007. PDF. ii

[DutKatMit11] Denys Dutykh, Theodoros Katsaounis et Dimitrios Mitsotakis. Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup. *Computational Physics*, 230 (8), 3035 - 3061, 2011. PDF. x, xxvii

[DutMitChuSho11] Denys Dutykh, Dimitrios Mitsotakis, Leonid Chubarov et Yuriy I. Shokin. The contribution of horizontal sea-bed displacements into

Tsunami generation processes. *HAL* : hal-00530999, version 2, arXiv : 1011.1741, 2011. PDF. xxvii

[DutMitGarDia11] Denys Dutykh, Dimitrios Mitsotakis, Xavier Gardeil et Frédéric Dias. On the use of finite fault solution for Tsunami generation problems. *HAL* : hal-00509384, version 2, arXiv : 1008.2742, 2011. PDF. xxvii

[Ghi88] Jean-Michel Ghidaglia. Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time. *J. Diff. Eq.*, 74, pp 369-390, 1988. PDF. xxv

[Ghi94] Jean-Michel Ghidaglia. A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equations. *J. Diff. Eq.*, **110**, 356-359, 1994. PDF. ii, xxv

[Gou00] Olivier Goubet. Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **6**, no. 3, 625-644, 2000. PDF. ii, xxv

[GouRosa02] Olivier Goubet et Ricardo Rosa. Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped KdV equation on the real line. *J. Differential Equations*, **185**, no. 1, 25-53, 2002. PDF. ii, xxv

[HecPioLehOht10] Frédéric Hecht, Olivier Pironneau, Antoine Le Hyaric et Kohji Ohtsuka. Freefem++ Manual, 2010. PDF. x

[KdV1895] Diederik Johannes Korteweg et Gustav De Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **5**, 39, p. 422, 1895. i

[LopPeTra11] Nuno David De Jesus Lopes, Pedro Jorge Silva Pereira et Luís Manuel Trabucho De Campos. A numerical analysis of a class of generalized Boussinesq-type equations using continuous/discontinuous FEM. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, DOI : 10.1002/fld.2631, 2011. PDF. xxvii

[Mal98] Stéphane Mallat. A wavelet tour of signal processing. *Academic press*, 1998. PDF. v

[Mam08] Youcef Mammeri.*Sur quelques modèles asymptotiques dans la théorie des ondes hydrodynamiques*, 231 p. Thèse : Mathématiques Appliquées : Lille 1 : 2008. PDF. xxv

[MirTem05] Alain Miranville et Roger Temam. Mathematical modelling in continuum mechanics. *Cambridge University Press*, 2005. PDF. xxv

[Mit09] Dimitrios Mitsotakis. Boussinesq systems in two space dimensions over a variable bottom for the generation and propagation of tsunami waves. *Mat. Comp. Simul.*, 80 :860-873, 2009. PDF. xxv, xxvii

[OttSud69] Edward Ott et R.N. Sudan. Nonlinear theory of ion acoustic wave with Landau damping. *The Physics of fluids*,Vol 12, N 11, 1969. PDF. ii

[OttSud70] Edward Ott et R.N. Sudan. Damping of solitary waves. *The Physics of fluids*, Vol 13, N 6, 1970. PDF. ii

[Pan11] Olivier Pantz. Communication personnel, 2011. http://www.cmap.polytechnique.fr/spip.php?article105. xx

[Sch81] Maria Elena Schonbek. Existence of solutions for the Boussinesq system of equations. *J. Diff. Eqns.*, 42 :325-352, 1981. PDF. ix

[WalBer02] Mark Walkley et Martin Berzins. A finite element method for the two-dimensional extended Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 39 :865-885, 2002. PDF. x

# Chapitre I

# OBTENTION DES MODÈLES

On présente dans ce chapitre, l'obtention des modèles de KdV et Boussinesq 2D tels que décrits dans Mammeri, Miranville - Temam, Mitsotakis et Whitam [Mam08, MirTem05, Mit09, Whi74]. Ces équations seront traitées numériquement dans la suite du travail en présence d'amortissements, soit par l'ajout d'un opérateur (pour KdV, chapitre II), soit par la présence du fond variable (pour Boussinesq, chapitre III).

## I.1 Historique des équations

Une description de l'histoire et des propriétés physiques de l'équation de Korteweg - de Vries peut être trouvée sur la page web de l'université de Herriot - Watt à Edinburgh (Ecosse), voir [Eil98]. Le texte suivant en est extrait :

Il y a un siècle et demi, tout en menant des expériences pour déterminer le modèle le plus efficace pour les bateaux de canal, un jeune ingénieur Ecossais appelé John Scott Russell ($1808 - 1882$) a fait une découverte scientifique remarquable. Voici son texte d'origine, comme il l'a décrit dans [Rus1845] :

*≪ J'observais le mouvement d'un bateau (de William Houston) qui était tiré rapidement le long d'un canal étroit par une paire de chevaux quand, soudain, le bateau s'arrêta. Mais il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal. Elle s'accumula autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation, puis, soudainement, l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse. Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, préservant sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur. La hauteur diminua peu à peu, et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'Août 1834, ma première rencontre avec ce phénomène si singulier et si beau que j'avais appelé "onde solitaire". ≫*

Cet événement a eu lieu sur le canal de l'Union à Hermiston, très proche du campus de l'université de Riccarton Heriot - Watt, Edinburgh.
Durant toute sa vie Russell restait convaincu que son "onde solitaire" ou soliton dans le

langage actuel a été d'une importance fondamentale. Pour cela, il a reproduit ce phénomène en faisant tirer une barge le long d'un canal étroit et en la stoppant soudainement et il a du faire face à des convictions bien établies. En particulier, plusieurs scientifiques et mathématiciens, dont Airy et Stokes, étaient convaincus que l'existence de ces ondes solitaires était impossible. Le problème restant non résolu pour plusieurs années, jusqu'à ce que la réponse positive a finalement été donné,

- d'abord en 1871 par Joseph Valentin Boussinesq (voir [Bou1871, Bou1872, Bou1877]).
- quelque temps plus tard, en 1876, par Lord Rayleigh[Str1876] ;

- et, afin d'enlever encore des doutes existants sur l'existence de l'onde solitaire, en 1894 par Gustav de Vries [dV1894] et en 1895 par Diederik Johannes Korteweg [KdV1985].

FIGURE I.1 – Recréation du soliton de John Scott Russell en 1995, Heriot-Watt University.

L'équation de KdV s'écrit mathématiquement sous la forme :

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \tag{I.1}$$

$u_{xxx}$ est la partie dite dispersive et $uu_x$ est la partie non linéaire. La compétition de ces deux termes autorise l'existence de formes cohérentes telles le soliton, dont l'expression s'obtient en recherchant des solutions se déplaçant de la gauche vers la droite à vitesse constante $c > 0$, soit $u(x,t) = u(x-ct)$. On trouve $u(x,t) = \dfrac{3c}{\cosh^2(x-ct)}$.

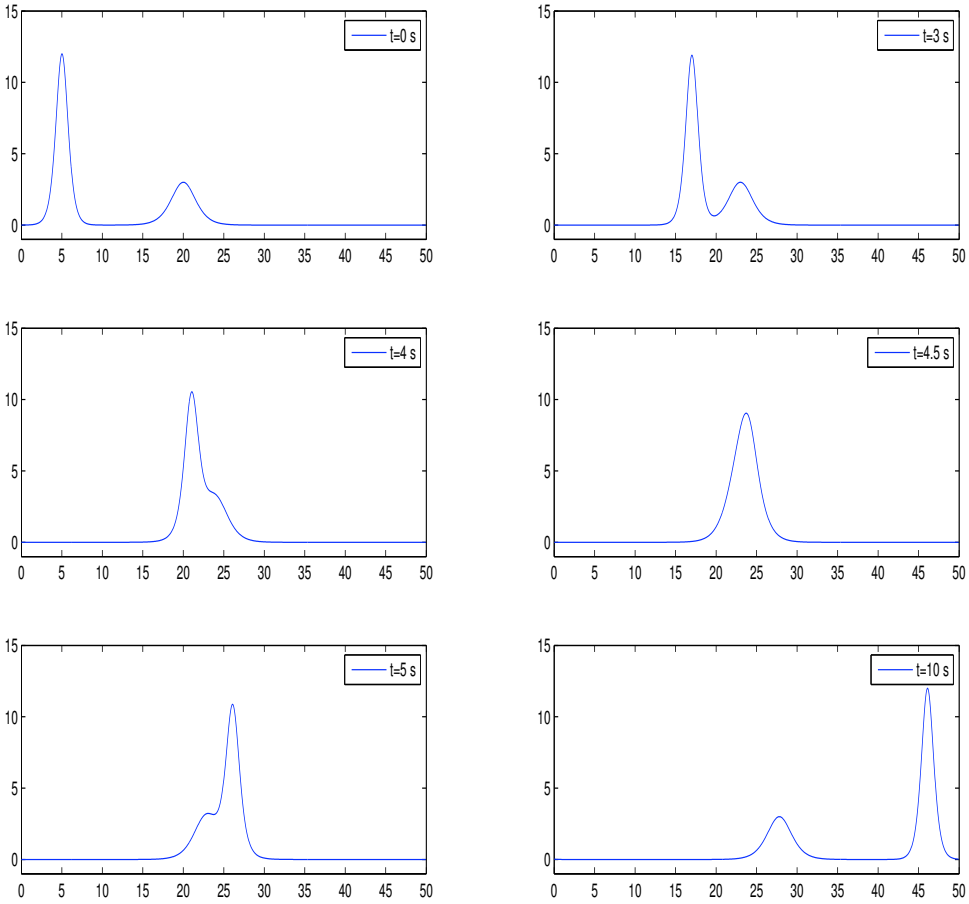



FIGURE I.2 – Propagation de deux solitons : $u_0(x) = 3c_1\text{sech}^2\left(\sqrt{c_1/4}(x - p_1 \cdot L)\right) + 3c_2\text{sech}^2\left(\sqrt{c_2/4}(x - p_2 \cdot L)\right)$ où $c_1 = 4, p_1 = .1, c_2 = 1, p_2 = .4$.

La Figure I.2 représente la propagation de deux solitons (cf. [JanFaz06]).

L'équation (I.1) possède un nombre infini d'invariants [MirTem05], dont les premiers sont

- La masse : $I_0(u) = \int_0^L u(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^L u_0(x)\mathrm{d}x.$
- La norme $L^2$ : $I_1(u) = \int_0^L (u(x,t))^2\mathrm{d}x = \int_0^L (u_0(x))^2\mathrm{d}x.$
- L'énergie : $I_2(u) = \int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_0^L (u(x,t))^3\mathrm{d}x.$

On observe ces conservations dans la Figure I.3 pour l'interaction de deux solitons solutions de l'équation (I.1).

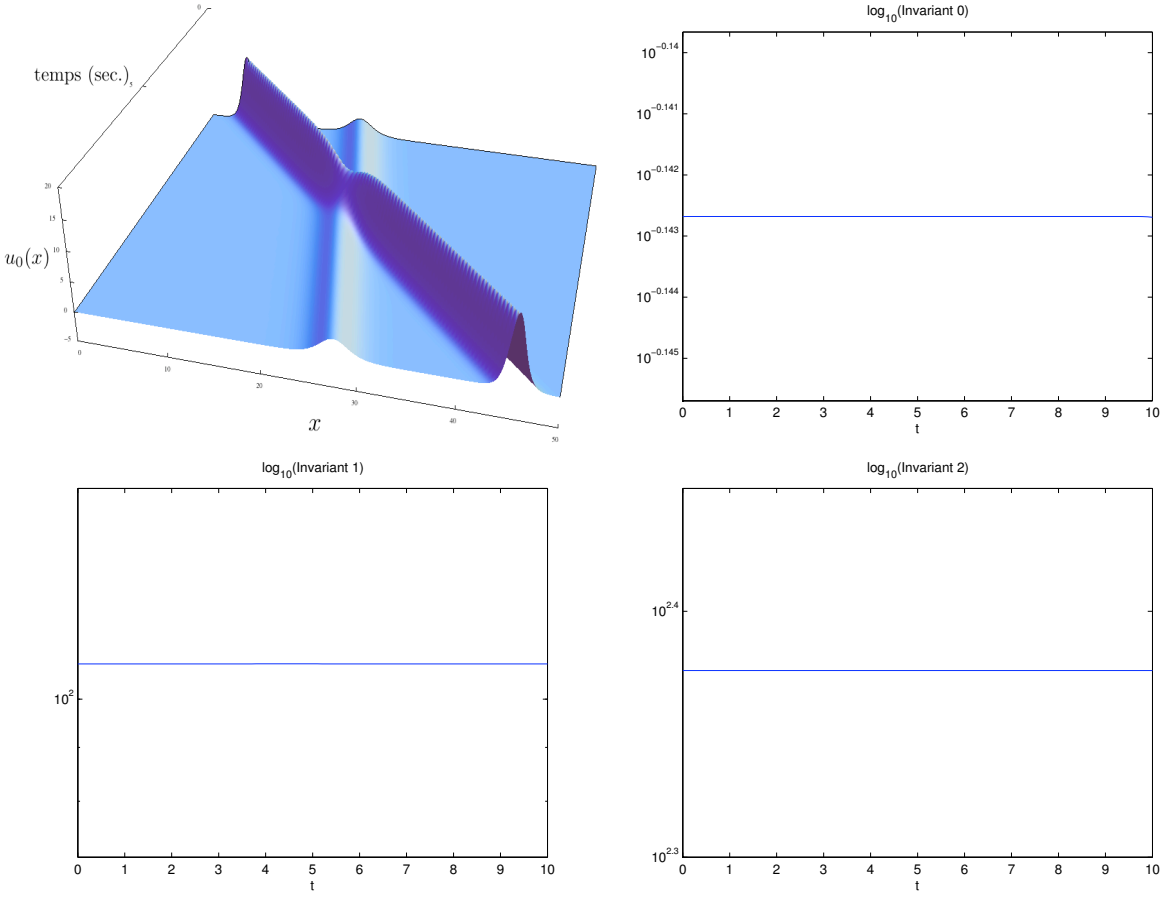



FIGURE I.3 – Intersection de deux solitons et les invariants correspondants pour : $u_0(x) = 3c_1\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{c_1/4}(x - p_1 \cdot L)\right) + 3c_2\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{c_2/4}(x - p_2 \cdot L)\right)$ où $c_1 = 4, p_1 = .1, c_2 = 1, p_2 = .4$.

## I.2 Obtention des systèmes de Boussinesq et KdV en 1D

Dans cette partie, les calculs sont effectuer de façon formelle.

On obtient les équations de KdV à partir des équations d'Euler 2D publiées en 1757. A cet effet, on considère un domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} \subset \mathbb{R}^2$ qui est occupé à un instant $t$ par un fluide Newtonien, parfait, incompressible, homogène, irrotationnel et qui est limité par le fond constant $-h_0$ et la surface $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$ (cf. Figure I.4).

**Remarque 5.** *Dans notre étude, on suppose que $\tilde{\eta} = \mathcal{O}(a)$, où $a$ est la différence entre la surface de l'eau et le niveau 0, et la longueur d'onde $\lambda = \mathcal{O}(\ell)$, de plus on se limite au cas où $\tilde{\eta} + h_0 > 0$ (il n'y a pas des zones sèches).*

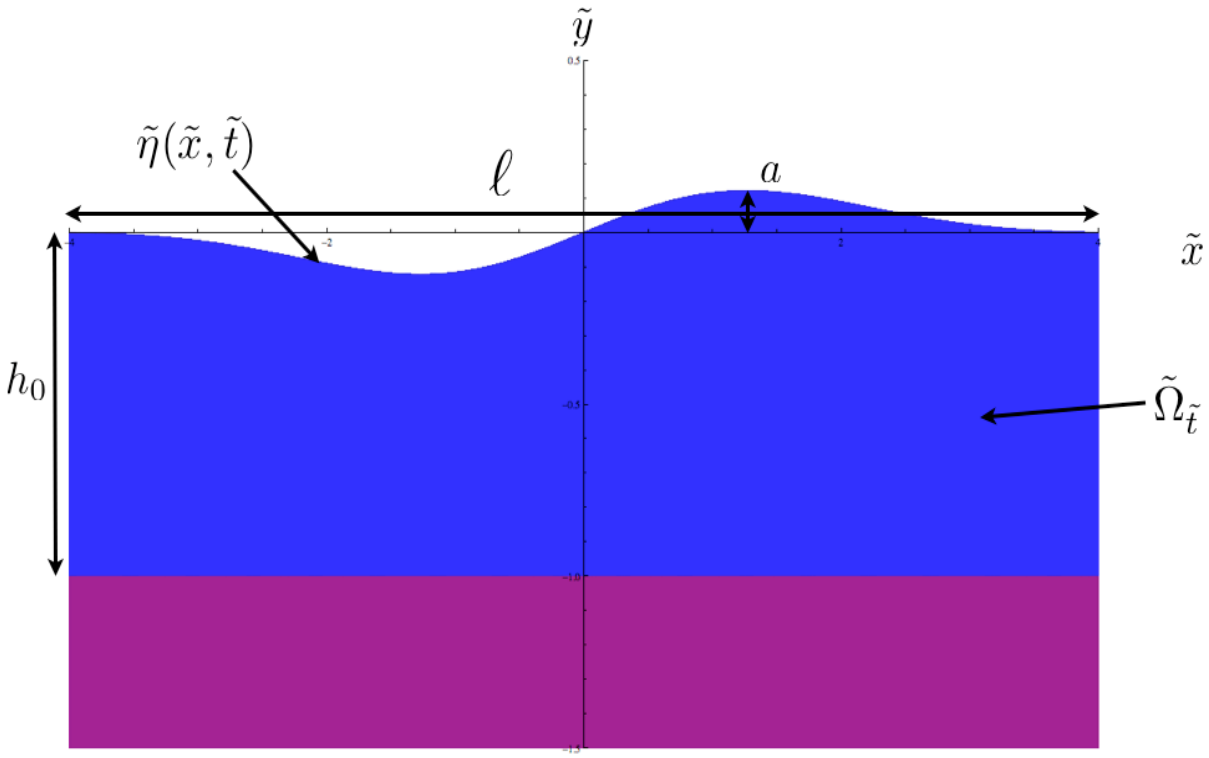



FIGURE I.4 – Domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} \subset \mathbb{R}^2$.

Le mouvement d'une particule $\tilde{X}_0 \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}_0}$ à l'instant initial est décrit par l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \ \tilde{\Omega}_{\tilde{t}_0} &\longrightarrow \tilde{\Omega}_{\tilde{t}} \\ \tilde{X}_0 &\longmapsto \tilde{X} = \tilde{\Phi}(\tilde{X}_0, \tilde{t}_0, \tilde{t}). \end{aligned}$$

On suppose que $\tilde{\Phi}$ est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}_0}$ sur $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$.

**Aspect Physique**

En partant des principes Newtoniens, on peut alors définir la vitesse de la particule à la position $\tilde{X} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$ au temps $\tilde{t}$ comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{U}(\tilde{X},\tilde{t}) := \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{X}_0,\tilde{t}_0,\tilde{t}) = (\tilde{u},\tilde{w})^T,$$

et l'accélération le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{X},\tilde{t}) := \frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial^2 \tilde{t}}(\tilde{X}_0,\tilde{t}_0,\tilde{t}).$$

Comme le fluide considéré est parfait alors il est non visqueux *ie* les forces d'interactions entre les molécules sont négligeables. Ce fluide est aussi incompressible c.à.d. le volume de la quantité de fluide reste constant durant le mouvement. D'autre part, il est homogène *ie* la masse volumique $\tilde{\rho}(\tilde{X},\tilde{t})$ est supposée constante par suite d'après le principe de la conservation de la masse (cf. [MirTem05])

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{X},\tilde{t}) + \tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\rho}(\tilde{X},\tilde{t})\tilde{U}(\tilde{X},\tilde{t})) = 0, \qquad \tilde{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)^T,$$

la divergence de la vitesse est nulle :

$$\tilde{\nabla}\cdot\tilde{U} = 0, \tag{I.2}$$

*ie*

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{w}_{\tilde{y}} = 0, \qquad \text{si } -h_0 < \tilde{y} < \tilde{\eta}. \tag{I.3}$$

De plus, en utilisant le fait que ce fluide est irrotationnel, on a :

$$\tilde{\nabla}\times\tilde{U} = 0,$$

*ie*

$$\tilde{u}_{\tilde{y}} = \tilde{w}_{\tilde{x}}, \qquad \text{si } -h_0 < \tilde{y} < \tilde{\eta}. \tag{I.4}$$

La condition que le fluide, à la surface libre où $\tilde{y} = \tilde{\eta}$, coule le long de la surface et ne la quitte jamais est une condition cinématique :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)(\tilde{\eta} - \tilde{y}) = 0.$$

Or $\tilde{\eta}$ ne dépend pas de $\tilde{y}$, ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}} - \tilde{w} = 0, \qquad \text{si } \tilde{y} = \tilde{\eta}. \tag{I.5}$$

Le principe fondamental de la dynamique postule que l'accélération subie par un corps est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse. Pour un fluide, il existe trois types de force :

- la pesanteur : $-\tilde{\nabla}(\tilde{\rho}g\tilde{y}) = -\tilde{\rho}g\mathbf{k}$, où $\mathbf{k} = (0,1)^T$ et la gravité $g$ qui est supposée constante.
- la pression : $-\tilde{\nabla}\tilde{P}$
- les forces de viscosité supposées négligeables dans notre étude.

Or l'accélération $\tilde{\gamma}$ s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{X},\tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{\Phi}(\tilde{X}_0,\tilde{t})\right) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{X},\tilde{t}\right) + \sum_{i=1}^{2} \tilde{U}_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i}\left(\tilde{X},\tilde{t}\right),$$

par suite

$$\tilde{\gamma}(\tilde{X},\tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{X},\tilde{t}\right) + \left(\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{U}\left(\tilde{X},\tilde{t}\right).$$

L'équation d'Euler $\left(\tilde{\rho}\tilde{\gamma} = \sum \tilde{F}_{ext}\right)$ devient :

$$\tilde{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{U}\left(\tilde{X},\tilde{t}\right)\right) = -\tilde{\nabla}\tilde{P} - \tilde{\rho}g\mathbf{k}.$$

Or

$$\left(\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{w}\tilde{u}_{\tilde{y}} \\ \tilde{u}\tilde{w}_{\tilde{x}} + \tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{y}} \end{pmatrix},$$

et comme $\tilde{\rho} = cte > 0$, alors la condition dynamique (l'équation de Bernouilli, cf. [Whi74]) sera :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{w}\tilde{u}_{\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{P}_{\tilde{x}} = 0, \qquad \text{si } -h_0 < \tilde{y} < \tilde{\eta}, \tag{I.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{w}_{\tilde{x}} + \tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{P}_{\tilde{y}} = -g, \qquad \text{si } -h_0 < \tilde{y} < \tilde{\eta}. \tag{I.7}$$

Sur la surface du fond $\tilde{y} = -h_0$, la condition d'imperméabilité (pas de d'écoulement dans la surface solide) est

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)(-h_0 - \tilde{y}) = 0,$$

ainsi

$$\tilde{w} = 0, \qquad \text{si } \tilde{y} = -h_0. \tag{I.8}$$

**Adimensionnement**

Nous allons à présent effectuer l'adimensionnement de ces équations.
Suivant [Mit09], on considère $h_0$ la profondeur de l'eau, $\ell$ la longueur d'onde de la vague,

$a$ l'amplitude de la vague et $c_0$ la célérité de la vague, (cf. Figure I.4), on introduit l'adimensionnement suivant :

$$x = \frac{\tilde{x}}{\ell}, \qquad y = \frac{\tilde{y}}{h_0}, \qquad c_0 = \sqrt{gh_0}, \qquad t = \frac{c_0}{\ell}\tilde{t}, \qquad \varepsilon := \frac{a}{h_0}, \qquad \sigma^2 := \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2,$$

$$u = \frac{h_0}{ac_0}\tilde{u}, \qquad w = \frac{\ell}{ac_0}\tilde{w}, \qquad \eta = \frac{\tilde{\eta}}{a}, \qquad P = \frac{1}{\tilde{\rho}gh_0}\tilde{P}.$$

Dans la suite, pour simplifier, on utilisera les notations suivantes :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_t, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = w_t.$$

Après le changement de variable dans les équations (I.3), (I.4), (I.5), (I.6), (I.7) et (I.8), on obtient :

– la conservation de la masse :

$$u_x + w_y = 0, \qquad \text{si } -1 < y < \varepsilon\eta. \tag{I.9}$$

– La condition que le fluide est irrotationnel :

$$u_y = \sigma^2 w_x, \qquad \text{si } -1 < y < \varepsilon\eta. \tag{I.10}$$

– La condition cinématique :

$$\eta_t + \varepsilon u\eta_x - w = 0, \qquad \text{si } y = \varepsilon\eta. \tag{I.11}$$

– La condition dynamique (équations des moments) :

$$u_t + \varepsilon u u_x + \varepsilon w u_y + \frac{1}{\varepsilon}P_x = 0, \qquad \text{si } -1 < y < \varepsilon\eta, \tag{I.12}$$

$$\varepsilon\sigma^2 w_t + \varepsilon^2\sigma^2 u w_x + \varepsilon^2\sigma^2 w w_y + P_y + 1 = 0, \qquad \text{si } -1 < y < \varepsilon\eta. \tag{I.13}$$

– La condition d'imperméabilité :

$$w = 0, \qquad \text{si } y = -1. \tag{I.14}$$

En intégrant (I.10) par rapport à $y$ de $-1$ à $y$, on obtient :

$$u(x, y, t) - u^b = \sigma^2 \int_{-1}^{y} w_x \mathrm{d}y = \mathcal{O}(\sigma^2) \text{ où } u^b = u(x, -1, t),$$

d'où

$$u(x, y, t) = u^b + \mathcal{O}(\sigma^2). \tag{I.15}$$

D'autre part, en intégrant l'équation (I.9) par rapport à $y$ de $-1$ à $y$, on obtient :

$$w(x, y, t) - w^b = -\int_{-1}^{y} u_x \mathrm{d}y, \text{ où } w^b = w(x, -1, t),$$

en utilisant (I.14) et (I.15), on déduit :

$$w(x, y, t) = -\int_{-1}^{y} u_x^b \mathrm{d}y + \mathcal{O}(\sigma^2) = -(y+1)u_x^b + \mathcal{O}(\sigma^2),$$

d'où

$$w_t = -(y+1)u^b_{tx} + \mathcal{O}(\sigma^2), \tag{I.16}$$

ce qui suit, d'après (I.10)

$$u_y = -\sigma^2(y+1)u^b_{xx} + \mathcal{O}(\sigma^4), \tag{I.17}$$

en intégrant par rapport à $y$ de $-1$ à $y$, on obtient :

$$u(x,y,t) = u^b - \frac{\sigma^2}{2}(y+1)^2 u^b_{xx} + \mathcal{O}(\sigma^4). \tag{I.18}$$

L'équation (I.13) s'écrit comme :

$$P_y + \varepsilon\sigma^2 w_t + 1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2), \qquad -1 < y < \varepsilon\eta,$$

alors d'après (I.16), on a :

$$P_y - \varepsilon\sigma^2(y+1)u^b_{tx} + 1 = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^2).$$

En intégrant par rapport à $y$ de $y$ à $\varepsilon\eta$, et en supposant que la pression à la surface est constante, on obtient :

$$P = \frac{\varepsilon\sigma^2}{2}(y^2+2y)u^b_{tx} + \varepsilon\eta - y + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2),$$

et en dérivant par rapport à $x$ la dernière relation, on obtient :

$$P_x = \frac{\varepsilon\sigma^2}{2}(y^2+2y)u^b_{txx} + \varepsilon\eta_x + \mathcal{O}(\sigma^4, \varepsilon\sigma^2, \varepsilon^2\sigma^2). \tag{I.19}$$

On en déduit de (I.12), (I.18), (I.19) et le fait que $\varepsilon w u_y \overset{(I.17)}{=} \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon\sigma^4)$ :

$$u^b_t + \eta_x + \varepsilon u^b u^b_x - \frac{\sigma^2}{2}u^b_{txx} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^2, \sigma^4), \tag{I.20}$$

d'autre part, en additionnant les équations (I.11) et (I.14), on obtient :

$$\eta_t + \varepsilon u(x, \varepsilon\eta, t)\eta_x - w(x, \varepsilon\eta, t) + w(x, -1, t) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} -w(x,\varepsilon\eta,t) + w(x,-1,t) &= -\int_{-1}^{\varepsilon\eta} w_y \mathrm{d}y \overset{(I.9)}{=} \int_{-1}^{\varepsilon\eta} u_x \mathrm{d}y \\ &\overset{Leibniz}{=} \partial_x\left(\int_{-1}^{\varepsilon\eta} u \mathrm{d}y\right) - \varepsilon u(x,\varepsilon\eta,t)\eta_x \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_t + \partial_x\left(\int_{-1}^{\varepsilon\eta} u \mathrm{d}y\right) = 0.$$

Ainsi, d'après (I.18), on déduit :

$$\eta_t + u^b_x + \varepsilon(\eta u^b)_x - \frac{\sigma^2}{6}u^b_{xxx} = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \sigma^4). \tag{I.21}$$

Dans la suite, on se concentre sur les termes dispersifs jusqu'à l'ordre $O(\sigma^2)$. Bien sûr, il est possible d'obtenir des systèmes de Boussinesq d'ordre élevé. On suppose aussi que le nombre de Stokes - Ursell (cf. [Urs53])

$$S_u := \frac{\varepsilon}{\sigma^2} = \mathcal{O}(1)$$

Les termes d'ordre $\mathcal{O}(\sigma^4)$, $\mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u\sigma^4) = \mathcal{O}(\sigma^4)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u^2\sigma^6) = \mathcal{O}(\sigma^6)$ et $\mathcal{O}(\varepsilon^3\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u^3\sigma^8) = \mathcal{O}(\sigma^8)$ doivent donc être négligés.
On déduit des équations (I.20) et (I.21) le système suivant :

$$\eta_t + u^b_x + \varepsilon(\eta u^b)_x - \frac{\sigma^2}{6}u^b_{xxx} = 0,$$

$$u^b_t + \eta_x + \varepsilon u^b u^b_x - \frac{\sigma^2}{2}u^b_{txx} = 0.$$

Finalement, en supposant que la vitesse du fluide est uniforme, *ie* les vitesses sont égales sur la verticale c.à.d. $u(x, y, t) = u(x, t) = u^b(x, t)$, on déduit le système de Boussinesq connu depuis 1863 :

$$\eta_t + u_x + \varepsilon(\eta u)_x - \frac{\sigma^2}{6}u_{xxx} = 0, \tag{I.22}$$

$$u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \frac{\sigma^2}{2}u_{txx} = 0. \tag{I.23}$$

On peut réduire le système (I.22, I.23) à une équation, qui constitue aussi un modèle asymptotique d'ordre 1, pour les équations d'ondes monodirectionnelles. Ces équations seront Korteweg-de Vries (KdV) [KdV1985] et Benjamin, Bona et Mahony (BBM) [BenBonaMah71].
La dernière hypothèse que nous ferons dans ce chapitre est de nous limiter aux ondes se déplaçant de la gauche vers la droite. Cela revient à substituer à l'équation des cordes vibrantes $\eta_{tt} - \eta_{xx} = 0$, obtenue à l'ordre 1, en dérivant l'équation (I.22) par rapport à $t$ et l'équation (I.23) par rapport à $x$, l'équation de transport $\eta_t + \eta_x = 0$.
De plus en dérivant l'équation (I.22) par rapport à $x$ et l'équation (I.23) par rapport à $t$ et après soustraction, on obtiendra l'équation des ondes suivantes $u_{tt} - u_{xx} = 0$, de qui on déduit de la même façon l'équation de transport $u_t + u_x = 0$.
Par suite

$$\eta_t = -\eta_x \text{ et } u_t = -u_x,$$

d'où en soustrayant les équations (I.22) et (I.23), on aura à l'ordre 1 :

$$\eta_t = u_t \text{ et } \eta_x = u_x.$$

Prenons $\eta$ et $u$ nulles à l'infini, on aura :

$$\eta = u,$$

d'où, en additionnant (I.22) et (I.23) et en tenant compte que $\eta = u$ et que d'une part $\eta_t = -\eta_x$ et d'autre part $u_t = -u_x$, on obtiendra les équations suivantes :

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3\varepsilon}{2}\eta\eta_x + \frac{\sigma^2}{6}\eta_{xxx} = 0, \tag{I.24}$$

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3\varepsilon}{2}\eta\eta_x - \frac{\sigma^2}{6}\eta_{txx} = 0. \tag{I.25}$$

On introduit l'adimensionnement suivant :

$$\eta = \varepsilon^{-1}\eta^\star, \quad x = \sigma x^\star, \quad t = \sigma t^\star.$$

Par souci de clareté, on ne notera pas l'exposant $\star$, par suite, on obtient, respectivement, l'équation de KdV et l'équation de BBM suivantes :

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0, \tag{I.26}$$

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{txx} = 0. \tag{I.27}$$

## I.3 Obtention des systèmes de Boussinesq 2D

De la même façon que pour l'obtention des systèmes de Boussinesq en 1D, on obtient les systèmes de Boussinesq en 2D en considérant un domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} \subset \mathbb{R}^3$ qui est occupé à un instant $t$ par un fluide Newtonien, parfait, incompressible, homogène, irrotationnel et qui est limité par le fond $-\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) = -\tilde{D}(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{\zeta}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t})$ et la surface $\tilde{\eta}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t})$ (cf. Figure I.5).

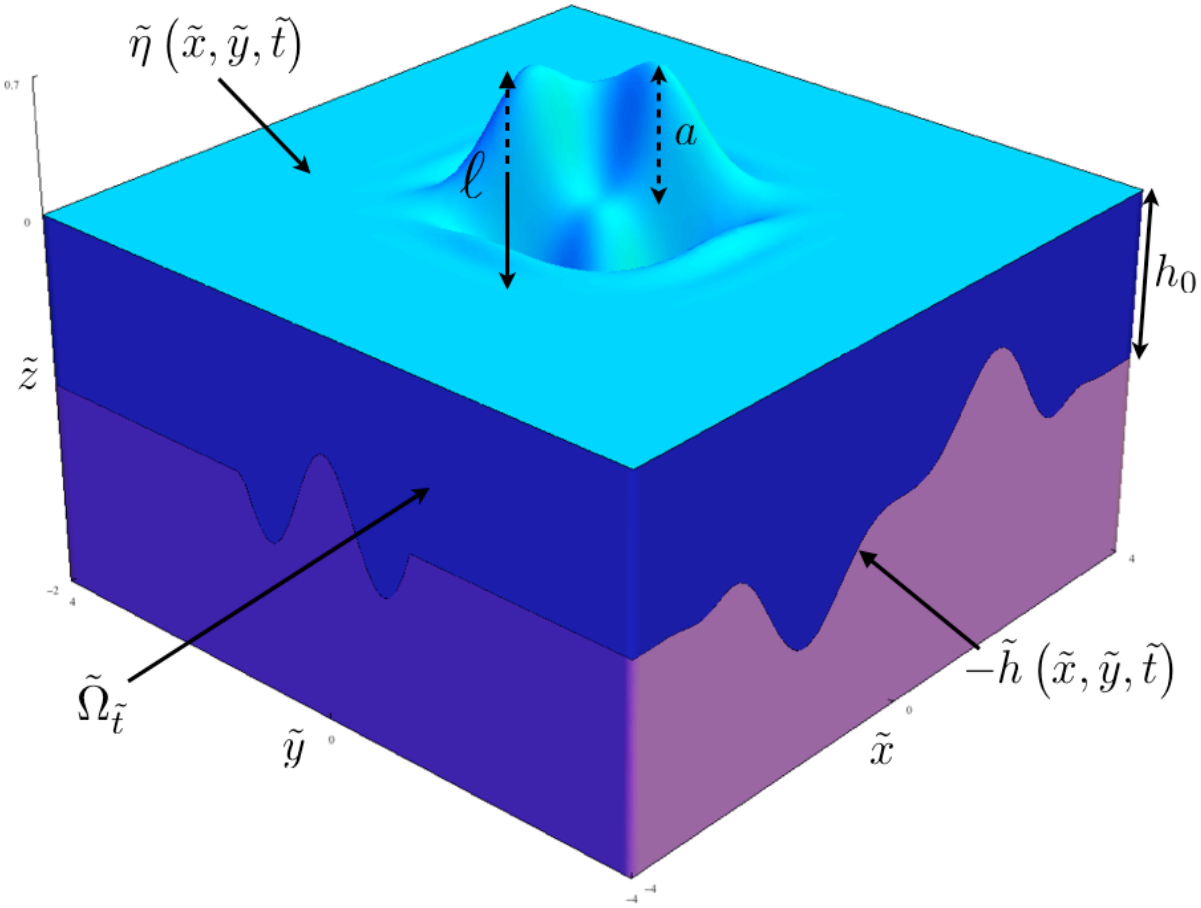



FIGURE I.5 – Domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$.

Dans cette partie, on considère $\tilde{X} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in \tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$ la position de la particule dans le fluide, sa vitesse $\tilde{U}(\tilde{X},\tilde{t}) := (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})^T$, son accélération $\tilde{\gamma}(\tilde{X},\tilde{t}) := \dfrac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial \tilde{t}^2}$ et les notations suivantes : le gradient $\tilde{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}}, \dfrac{\partial}{\partial\tilde{y}}, \dfrac{\partial}{\partial\tilde{z}}\right)^T$, $\tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ et $\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}}, \dfrac{\partial}{\partial\tilde{y}}\right)^T$.

Dans ce cas là, on a :

– le principe de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}(\tilde{X},\tilde{t})+\tilde{\nabla}\cdot(\tilde{\rho}(\tilde{X},\tilde{t})\tilde{U}(\tilde{X},\tilde{t}))=0,\qquad \tilde{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial\tilde{y}},\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\right)^T;$$

par suite, comme $\tilde{\rho}=cte$ alors la divergence de la vitesse est nulle :

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}\cdot\tilde{V}+\tilde{w}_{\tilde{z}}=0,\qquad \text{si } -\tilde{h}<\tilde{z}<\tilde{\eta}; \tag{I.28}$$

– la condition d'irrotationalité du fluide :

$$\begin{array}{rcll}\tilde{u}_{\tilde{y}} &=& \tilde{v}_{\tilde{x}},\\ \tilde{V}_{\tilde{z}} &=& \tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{w}, & \text{si } -\tilde{h}<\tilde{z}<\tilde{\eta};\end{array} \tag{I.29}$$

– la condition cinématique :

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{V}\cdot\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{\eta}-\tilde{w}=0,\qquad \text{si } \tilde{z}=\tilde{\eta}; \tag{I.30}$$

– la condition dynamique :

$$\tilde{\rho}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{t}}+\left(\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{U}\right)=-\tilde{\nabla}P-\tilde{\rho}g\mathbf{k},\ \text{où } \mathbf{k}=(0,0,1)^T.$$

Or

$$\left(\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{U}=\begin{pmatrix}\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}}+\tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}}+\tilde{w}\tilde{u}_{\tilde{z}}\\ \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}}+\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}+\tilde{w}\tilde{v}_{\tilde{z}}\\ \tilde{u}\tilde{w}_{\tilde{x}}+\tilde{v}\tilde{w}_{\tilde{y}}+\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{z}}\end{pmatrix}\overset{(I.29)}{=}\begin{pmatrix}\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}}+\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{x}}+\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{x}}\\ \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{y}}+\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}+\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{y}}\\ \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{z}}+\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{z}}+\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{z}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\tilde{\nabla}|\tilde{U}|^2,$$

d'où la condition dynamique (l'équation de Bernouilli) :

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{t}}+\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}|\tilde{V}|^2+\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}P+\tilde{w}\tilde{V}_{\tilde{z}}=0,\qquad \text{si } -\tilde{h}<\tilde{z}<\tilde{\eta}, \tag{I.31}$$

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{V}\cdot\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{w}+\frac{1}{\tilde{\rho}}P_{\tilde{z}}+\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{z}}=-g,\qquad \text{si } -\tilde{h}<\tilde{z}<\tilde{\eta}; \tag{I.32}$$

– la condition d'imperméabilité (pas de d'écoulement dans la surface solide) est

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}+\tilde{U}\cdot\tilde{\nabla}\right)(-\tilde{h}-\tilde{z})=0,$$

par suite

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{t}}+\tilde{V}\cdot\tilde{\nabla}_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{h}+\tilde{w}=0,\qquad \text{si } \tilde{z}=-\tilde{h}. \tag{I.33}$$

**Adimensionnement**

On procède maintenant à l'adimensionnement de ces équations en suivant [Mit09]. On considère $h_0$ la profondeur de l'eau, $\ell$ la longueur d'onde de la vague, $a$ l'amplitude de la vague, $c_0$ la célérité de la vague, (cf. Figure I.5), on introduit l'adimensionnement suivant :

$$x = \frac{\tilde{x}}{\ell}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\ell}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{h_0}, \quad c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad t = \frac{c_0}{\ell}\tilde{t}, \quad \varepsilon := \frac{a}{h_0}, \quad \sigma^2 := \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2,$$

$$P = \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho} g h_0}, \quad u = \frac{h_0}{ac_0}\tilde{u}, \quad v = \frac{h_0}{ac_0}\tilde{v}, \quad w = \frac{\ell}{ac_0}\tilde{w}, \quad \eta = \frac{\tilde{\eta}}{a}, \quad h = \frac{\tilde{h}}{h_0}, \quad D = \frac{\tilde{D}}{h_0}, \quad \zeta = \frac{\tilde{\zeta}}{a}.$$

Dans la suite, pour simplifier on utilisera les notations suivantes :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_t, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = V_t, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \zeta_t, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_t, \quad V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \nabla_{x,y} = \nabla, \quad \Delta_{x,y} = \Delta,$$

après le changement de variable dans les équations (I.28), (I.29), (I.30), (I.31), (I.32) et (I.33), on obtient :

– la conservation de la masse :

$$\nabla \cdot V + w_z = 0, \qquad \text{si } -h < z < \varepsilon\eta. \tag{I.34}$$

– La condition que le fluide est irrotationnel :

$$u_y = v_x, \qquad \text{si } -h < z < \varepsilon\eta, \tag{I.35}$$

$$V_z = \sigma^2 \nabla w, \qquad \text{si } -h < z < \varepsilon\eta. \tag{I.36}$$

– La condition cinématique :

$$\eta_t + \varepsilon V \cdot \nabla\eta - w = 0, \qquad \text{si } z = \varepsilon\eta. \tag{I.37}$$

– La condition dynamique :

$$V_t + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V|^2 + \varepsilon w V_z + \frac{1}{\varepsilon}\nabla P = 0, \qquad \text{si } -h < z < \varepsilon\eta, \tag{I.38}$$

$$\varepsilon\sigma^2 w_t + \varepsilon^2\sigma^2 V \cdot \nabla w + \varepsilon^2\sigma^2 w w_z + P_z + 1 = 0, \qquad \text{si } -h < z < \varepsilon\eta. \tag{I.39}$$

– La condition d'imperméabilité :

$$\zeta_t + V \cdot \nabla h + w = 0, \qquad \text{si } z = -h. \tag{I.40}$$

Suivant [Chen03, Nw93, Per67], on obtient les équations généralisées des systèmes de Boussinesq, comme suit :

On note la vitesse horizontale du fluide à une certaine hauteur $z_\theta = (\theta - 1)h + \varepsilon\theta\eta$ où $0 \leq \theta \leq 1$ par :

$$V^\theta = V(x, y, z_\theta, t) \text{ et } w^\theta = w(x, y, z_\theta, t).$$

On remarque aussi que :

$$h(x,y,t) = D(x,y) + \varepsilon\zeta(x,y,t) = D(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{I.41}$$

par suite :

$$z_\theta = (\theta-1)h + \mathcal{O}(\varepsilon) \overset{(I.41)}{=} (\theta-1)D + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{I.42}$$

En intégrant (I.36) par rapport à $z$ de $z_\theta$ à $z$, on obtient :

$$V(X,t) - V^\theta = \sigma^2 \int_{z_\theta}^{z} \nabla w \mathrm{d}z = \mathcal{O}(\sigma^2),$$

d'où

$$V(X,t) = V^\theta + \mathcal{O}(\sigma^2). \tag{I.43}$$

Or d'après l'équation (I.40), on a :

$$w^0 = -\zeta_t - V^\theta \cdot \nabla D + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \sigma^2), \tag{I.44}$$

d'autre part, en intégrant l'équation (I.34) par rapport à $z$ de $z_0$ à $z$, on obtient :

$$w(X,t) - w^0 = -\int_{z_0}^{z} \nabla \cdot V(X,t) \mathrm{d}z,$$

en utilisant (I.43) et (I.44), on déduit :

$$w(X,t) = -\int_{-h}^{z} \nabla\cdot V^\theta \mathrm{d}z - V^\theta\cdot\nabla D - \zeta_t + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2,\sigma^2) = -(z+h)\nabla\cdot V^\theta - V^\theta\cdot\nabla D - \zeta_t + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2,\sigma^2).$$

Ainsi

$$w(X,t) = -z\nabla\cdot V^\theta - \nabla\cdot\left(DV^\theta\right) - \zeta_t + \mathcal{O}(\varepsilon, \varepsilon\sigma^2, \sigma^2),$$

d'où

$$w_t = -z\nabla\cdot V_t^\theta - \nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right) - \zeta_{tt} + \mathcal{O}(\varepsilon, \varepsilon\sigma^2, \sigma^2). \tag{I.45}$$

Il s'ensuit, d'après (I.36)

$$V_z = -\sigma^2 z\nabla\left(\nabla\cdot V^\theta\right) - \sigma^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right) - \sigma^2\nabla\zeta_t + \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^4). \tag{I.46}$$

En intégrant par rapport à $z$ de $z_\theta$ à $z$, on obtient :

$$V(X,t) = V^\theta + \frac{\sigma^2}{2}\left(z_\theta^2 - z^2\right)\nabla\left(\nabla\cdot V^\theta\right) - \sigma^2(z-z_\theta)\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right) - \sigma^2(z-z_\theta)\nabla\zeta_t$$
$$+ \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^4). \tag{I.47}$$

L'équation (I.39) s'écrit sous la forme :

$$P_z + \varepsilon\sigma^2 w_t + 1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2),$$

alors d'après l'équation (I.45), on a :

$$P_z - \varepsilon\sigma^2 z\nabla\cdot V_t^\theta - \varepsilon\sigma^2\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right) - \varepsilon\sigma^2\zeta_{tt} + 1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4).$$

En intégrant par rapport à $z$ de $z$ à $\varepsilon\eta$, et en supposant que la pression à la surface est constante, on obtient :

$$P = \varepsilon\sigma^2\frac{z^2}{2}\nabla\cdot V_t^\theta + \varepsilon\sigma^2 z\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right) + \varepsilon\sigma^2 z\zeta_{tt} + \varepsilon\eta - z + \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4).$$

En appliquant le gradient $\nabla$ à la dernière expression, on aura :

$$\nabla P = \varepsilon\sigma^2\frac{z^2}{2}\nabla\left(\nabla\cdot V_t^\theta\right) + \varepsilon\sigma^2 z\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right)\right) + \varepsilon\sigma^2 z\nabla\zeta_{tt} + \varepsilon\nabla\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4),$$

or $\varepsilon w V_z \overset{(I.46)}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4, \varepsilon^3\sigma^4, \varepsilon\sigma^6, \varepsilon^2\sigma^6, \varepsilon^3\sigma^6)$, alors en remplaçant dans (I.38) et en utilisant (I.47), on déduit :

$$\begin{aligned} V_t^\theta + \nabla\eta + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V^\theta|^2 + \frac{\sigma^2}{2}z_\theta^2\nabla\left(\nabla\cdot V_t^\theta\right) + \sigma^2 z_\theta\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right)\right) + \sigma^2 z_\theta\nabla\zeta_{tt} \\ = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \sigma^4, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4, \varepsilon^3\sigma^4, \varepsilon\sigma^6, \varepsilon^2\sigma^6, \varepsilon^3\sigma^6). \end{aligned} \tag{I.48}$$

Or

$$\nabla\left(\nabla\cdot V\right) = \nabla\left(u_x + v_y\right) = \begin{pmatrix} u_{xx} + v_{xy} \\ u_{yx} + v_{yy} \end{pmatrix} \overset{(I.35)}{=} \begin{pmatrix} u_{xx} + u_{yy} \\ v_{xx} + v_{yy} \end{pmatrix} = \Delta V. \tag{I.49}$$

Par suite d'après (I.42), on déduit :

$$\begin{aligned} V_t^\theta + \nabla\eta + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V^\theta|^2 + \sigma^2\left(\frac{(\theta-1)^2}{2}D^2\Delta V_t^\theta + (\theta-1)D\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right)\right) + (\theta-1)D\nabla\zeta_{tt}\right) \\ = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \sigma^4, \varepsilon\sigma^4, \varepsilon^2\sigma^4, \varepsilon^3\sigma^4, \varepsilon\sigma^6, \varepsilon^2\sigma^6, \varepsilon^3\sigma^6). \end{aligned} \tag{I.50}$$

D'autre part, en additionnant les équations (I.37) et (I.40), on obtient :

$$\eta_t + \zeta_t + \varepsilon V(x, y, \varepsilon\eta, t)\cdot\nabla\eta + V(x, y, -h, t)\cdot\nabla h - w(x, y, \varepsilon\eta, t) + w(x, y, -h, t) = 0.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} -w(x, y, \varepsilon\eta, t) + w(x, y, -h, t) &= -\int_{-h}^{\varepsilon\eta} w_z \mathrm{d}z \overset{(I.34)}{=} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\cdot V(X, t)\mathrm{d}z \\ &= \nabla\cdot\int_{-h}^{\varepsilon\eta} V(X, t)\mathrm{d}z - \varepsilon V(x, y, \varepsilon\eta, t)\cdot\nabla\eta - V(x, y, -h, t)\cdot\nabla h, \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_t + \zeta_t + \nabla\cdot\int_{-h}^{\varepsilon\eta} V(X, t)\mathrm{d}z = 0.$$

Ainsi, d'après (I.47), on déduit :

$$\begin{aligned} \eta_t + \nabla\cdot\left((h + \varepsilon\eta)V^\theta\right) + \sigma^2\nabla\cdot\left[\left(\frac{z_\theta^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)h\nabla\left(\nabla\cdot V^\theta\right) + \left(z_\theta + \frac{h}{2}\right)h\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)\right] \\ + \sigma^2\nabla\cdot\left[\left(z_\theta + \frac{h}{2}\right)h\nabla\zeta_t\right] + \zeta_t = \mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2, \varepsilon^2\sigma^2, \varepsilon^3\sigma^2, \sigma^4), \end{aligned}$$

ce qui implique, d'après (I.41) et (I.42) ;

$$\eta_t+\nabla\cdot\big((D+\varepsilon\zeta+\varepsilon\eta)V^\theta\big)+\sigma^2\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\nabla\cdot\big(D^2\nabla\zeta_t\big)+\sigma^2\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}\left((\theta-1)^2-\frac{1}{3}\right)D^3\nabla\left(\nabla\cdot V^\theta\right)\right.$$

$$\left.+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)D^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)\right]+\zeta_t=\mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2,\varepsilon^2\sigma^2,\varepsilon^3\sigma^2,\varepsilon^4\sigma^2,\sigma^4). \tag{I.51}$$

Dans la suite, on se concentre sur les termes dispersifs jusqu'à l'ordre $O(\sigma^2)$. Bien sûr, il est possible d'obtenir des systèmes de Boussinesq d'ordre élevé. On suppose aussi que le nombre de Stokes - Ursell $S_u := \dfrac{\varepsilon}{\sigma^2} = \mathcal{O}(1)$ (cf. [Urs53]). Par suite les termes d'ordre $\mathcal{O}(\sigma^4)$, $\mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2) = \mathcal{O}(S\sigma^4) = \mathcal{O}(\sigma^4)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^2\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u^2\sigma^6) = \mathcal{O}(\sigma^6)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^3\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u^3\sigma^8) = \mathcal{O}(\sigma^8)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^4\sigma^2) = \mathcal{O}(S_u^4\sigma^{10}) = \mathcal{O}(\sigma^{10})$ et $\mathcal{O}(\varepsilon\sigma^4) = \mathcal{O}(S\sigma^6) = \mathcal{O}(\sigma^6)$ doivent être négligés.

On déduit des équations (I.50) et (I.51) le système suivant :

$$\eta_t+\nabla\cdot\big((D+\varepsilon\zeta+\varepsilon\eta)V^\theta\big)+\zeta_t$$

$$+\sigma^2\nabla\cdot\left[\widehat{a}D^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)+\widehat{b}D^3\nabla\left(\nabla\cdot V^\theta\right)\right]+\sigma^2\widehat{a}\nabla\cdot\left(D^2\nabla\zeta_t\right)=0, \tag{I.52}$$

$$V_t^\theta+\nabla\eta+\frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V^\theta|^2+\sigma^2\left(\widehat{d}D^2\Delta V_t^\theta+\widehat{c}D\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right)\right)+\widehat{c}D\nabla\zeta_{tt}\right)=0, \tag{I.53}$$

où

$$\widehat{a}=\left(\theta-\frac{1}{2}\right),\qquad \widehat{b}=\frac{1}{2}\left((\theta-1)^2-\frac{1}{3}\right),\qquad \widehat{c}=(\theta-1),\qquad \widehat{d}=\frac{(\theta-1)^2}{2}.$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV_t^\theta\right)\right) & = & \nabla\left(\nabla D\cdot V_t^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t^\theta+D\nabla\left(\nabla\cdot V_t^\theta\right)\\ & \overset{(I.49)}{=} & \nabla\left(\nabla D\cdot V_t^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t^\theta+D\Delta V_t^\theta\end{array}$$

et

$$\widehat{b}D^3\nabla\left(\nabla\cdot V_t^\theta\right)=\widehat{b}D^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)-\widehat{b}D^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V^\theta\right].$$

On en déduit le système équivalent à {(I.52), (I.53)} :

$$\eta_t+\nabla\cdot\big((D+\varepsilon\zeta+\varepsilon\eta)V^\theta\big)+\zeta_t+\sigma^2\widehat{a}\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t)$$

$$+\sigma^2\nabla\cdot\left\{(\widehat{a}+\widehat{b})D^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)-\widehat{b}D^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V^\theta\right]\right\}=0, \tag{I.54}$$

$$V_t^\theta+\nabla\eta+\frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V^\theta|^2+\sigma^2\left\{\widehat{c}D\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t^\theta\right]+\left(\widehat{c}+\widehat{d}\right)D^2\Delta V_t^\theta+\widehat{c}D\nabla\zeta_{tt}\right\}=0. \tag{I.55}$$

De ces équations, on observe que, à l'ordre 1,

$$\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)=-\eta_t-\zeta_t+\mathcal{O}(\varepsilon,\sigma^2)\text{ et }V_t^\theta=-\nabla\eta+\mathcal{O}(\varepsilon,\sigma^2).$$

Soient $\nu, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right) &= (\nu+1-\nu)\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)\\ &= \nu\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)-(1-\nu)\left(\nabla\eta_t+\nabla\zeta_t\right)+\mathcal{O}(\varepsilon,\sigma^2)\end{aligned}$$

et

$$\Delta V_t^\theta = (\mu+1-\mu)\Delta V_t^\theta = \mu\Delta V_t^\theta-(1-\mu)\Delta\nabla\eta+\mathcal{O}(\varepsilon,\sigma^2).$$

Comme $\widehat{a}+\widehat{b}=\dfrac{1}{2}\left(\theta^2-\dfrac{1}{3}\right)$, $\widehat{c}+\widehat{d}=\dfrac{1}{2}(\theta^2-1)$ et les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon\sigma^2,\varepsilon^2\sigma^2)$ sont négligeables, on déduit le système suivant :

$$\eta_t+\nabla\cdot\left((D+\varepsilon\zeta+\varepsilon\eta)V^\theta\right)+\zeta_t+\sigma^2A\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t)$$

$$+\sigma^2\nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V^\theta\right]+aD^2\nabla\left(\nabla\cdot\left(DV^\theta\right)\right)-bD^2\nabla\eta_t\right\}=0, \quad \text{(I.56)}$$

$$V_t^\theta+\nabla\eta+\frac{1}{2}\varepsilon\nabla|V^\theta|^2+\sigma^2CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t^\theta\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t^\theta\right]$$

$$+\sigma^2\left\{cD^2\Delta\nabla\eta-dD^2\Delta V_t^\theta+CD\nabla\zeta_{tt}\right\}=0, \quad \text{(I.57)}$$

où

$$A=\nu\widehat{a}-(1-\nu)\widehat{b},\qquad B=-\widehat{b},\qquad C=\widehat{c},$$

$$a=\frac{1}{2}\left(\theta^2-\frac{1}{3}\right)\nu, b=\frac{1}{2}\left(\theta^2-\frac{1}{3}\right)(1-\nu), c=\frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)\mu, d=\frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)(1-\mu). \quad \text{(I.58)}$$

Finalement, en supposant que les vitesses sont égales sur la verticale *ie* $V(x,y,z,t)=V(x,y,t)=V^\theta(x,y,t)$ et en faisant le changement de variable suivant :

$$X=\sigma X^*,\qquad t=\sigma t^*,\qquad \eta=\varepsilon^{-1}\eta^*,\qquad V=\varepsilon^{-1}V^*,\qquad D=D^*,\qquad \zeta=\varepsilon^{-1}\zeta^*$$

et en enlevant l'exposant $^*$ du nouveau système, on déduit :

$$\eta_t+\nabla\cdot(DV)+\nabla\cdot(\eta V)+\nabla\cdot(\zeta V)+\zeta_t+A\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t)$$

$$+\nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V\right)+\nabla D\nabla\cdot V\right]+aD^2\nabla\left(\nabla\cdot(DV)\right)-bD^2\nabla\eta_t\right\}=0, \quad \text{(I.59)}$$

$$V_t+\nabla\eta+\frac{1}{2}\nabla|V|^2+CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t\right]+cD^2\Delta\nabla\eta-dD^2\Delta V_t+CD\nabla\zeta_{tt}=0. \quad \text{(I.60)}$$

# Bibliographie


[BenBonaMah71] Thomas Brooke Benjamin, Jerry Lioyd Bona et J.J. Mahony. Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272, (1220) : 47-78, 1971. PDF. 10

[Bou1871] Joseph Valentin Boussinesq. Théorie générale des mouvements, qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, T73 : 256-260, 1871. PDF. 2

[Bou1872] Joseph Valentin Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d' un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures. Appl.*, 17 :55-108, 1872. PDF. 2

[Bou1877] Joseph Valentin Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France*. (Série 2), 23 :1-680, 1877. PDF. 2

[Chen03] Min Chen. Equations for Bi-directional Waves Over an Uneven Bottom. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol 62, Issue 1-2, February 2003. PDF. 14

[dV1894] Gustav De Vries. Bijdrage tot de Kennis der Lange Golven. *Acad. Proefschrift, Universiteit van Amsterdam*, Book 94 p, Loosjes, 1894. PDF. 2

[Eil98] Chris Eilbeck, 1998. PDF. 1

[JanFaz06] Alessandra Jannelli et Ricardo Fazio. Implicit Pseudo-Spectral Methods for Dispersive and Wave Propagation Problems. *Communications to SIMAI Congress, ISSN*, Vol. 1, 1827-9015, 2006. PDF. 4

[KdV1985] Diederik Johannes Korteweg et Gustav De Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **5**, 39, p. 422, 1895. 2, 10

[Mam08] Youcef Mammeri.*Sur quelques modèles asymptotiques dans la théorie des ondes hydrodynamiques*, 231 p. Thèse : Mathématiques Appliquées : Lille 1 : 2008. PDF. 1

[MirTem05] Alain Miranville et Roger Temam. Mathematical modelling in continuum mechanics. *Cambridge University Press*, 2005. PDF. 1, 4, 6

[Mit09] Dimitrios Mitsotakis. Boussinesq systems in two space dimensions over a variable bottom for the generation and propagation of tsunami waves. *Mat. Comp. Simul.*, 80 :860-873, 2009. PDF. 1, 7, 14

[Nw93] Okey George Nwogu. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagationy. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.* 119 :618-638, 1993. PDF. 14

[Per67] Howell D. Peregrine. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech*, 27 :815-827, 1967. PDF. 14

[Rus1845] John Scott Russell. Report on Waves. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844, pp 311-390, Plates XLVII-LVII), 1845. London. PDF. 1

[Str1876] John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh. On Waves, *Phil. Mag.*, 1, 257-271, 1876. PDF. 2

[Urs53] Fritz Ursell. The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49 :685-694, 1953. PDF. 10, 17

[Whi74] Gerald Beresford Whitham. Linear and nonlinear waves. *John Wiley & Sons, New York*, 1974. PDF. 1, 7

# Chapitre II

# EQUATIONS DE KdV AMORTIES

## II.1 Etude d'un modèle d'amortissement

En présence d'un terme d'amortissement $\mathcal{L}(u)$, l'équation de KdV s'écrit

$$u_t + u_{xxx} + \mathcal{L}(u) + uu_x = 0. \tag{II.1}$$

Elle ne possède plus une infinité d'invariants :

- la masse : $I_0(u) = \displaystyle\int_0^L u(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^L u_0(x)\mathrm{d}x,$
- la norme $L^2$ : $I_1(u) = \displaystyle\int_0^L (u(x,t))^2\mathrm{d}x = \int_0^L (u_0(x))^2\mathrm{d}x,$
- l'énergie : $I_2(u) = \displaystyle\int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_0^L (u(x,t))^3\mathrm{d}x\,;$

sauf suivant les cas, la conservation de la masse. L'opérateur $\mathcal{L}(u)$ est choisi tel que $\displaystyle\int \mathcal{L}(u)u dx > 0$ de sorte à ce que l'énergie ne soit plus conservée (cf. Figure II.1). En prenant le produit scalaire de (II.5) avec $u$ dans $L^2(\Omega)$, on trouve, pour $u$ assez régulière,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathcal{L}(u)u\mathrm{d}x = 0.$$

La norme $L^2$ de la solution décroît ainsi au cours du temps. (cf. Figure II.1)
Une des conséquences est que des structures cohérentes comme les solitons ne peuvent plus exister. Sous certaines conditions sur $\mathcal{L}$, on peut montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} |u|_{L^2} = 0$. Nous discuterons de ces questions dans le présent chapitre.

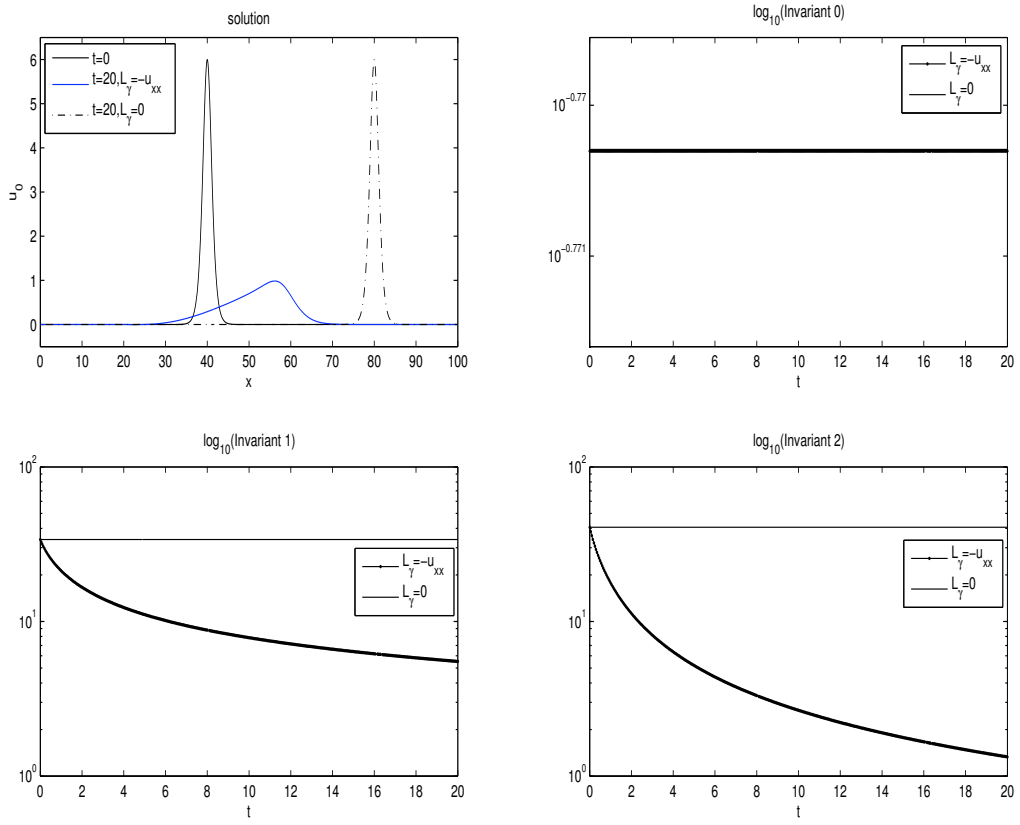



FIGURE II.1 – $u_0(x) = 3c_1\text{sech}(\sqrt{c_1}(x - p_1 \cdot L)/2)^2, c_1 = 2, p_1 = .4.$

## II.1.1 Introduction

Dans [OttSud69], Ott et Sudan ont proposé une équation de KdV amortie comme un modèle d'amortissement de Landau pour les ondes acoustiques ioniques, l'amortissement (linéaire) étant non local, et dans [OttSud70] ils ont présenté différents modèles d'amortissement avec l'opérateur $\mathcal{L}$ comme

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_{xxx} + \alpha_3 u u_x + \alpha_4 \mathcal{L}(u) = 0, x \in \Omega, t > 0,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4$ et où $\mathcal{L}$ l'opérateur d'amortissement linéaire qui satisfait

$$\int_\Omega \mathcal{L}(u) u \mathrm{d}x \geq 0.$$

La norme $L^2$ de la solution est alors amortie comme

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \alpha_3 \int_\Omega \mathcal{L}(u) u \mathrm{d}x = 0.$$

Plusieurs auteurs ont étudié l'équation KdV amortie, mais de toute façon la littérature n'est pas si vaste et en particulier peu de travaux ont été réalisés sur la simulation numérique

de ces modèles.

Les modèles d'amortissement qui ont été considérés sont principalement de la forme

$$\mathcal{L}(u) = |D|^{\alpha} u,$$

où $|D| = \sqrt{-\Delta}$, conduisant à l'équation KdV dissipative

$$u_t + u_{xxx} + |D|^{\alpha} u + u u_x = 0; x \in \Omega, t > 0, \tag{II.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{II.3}$$

avec $\alpha \in [0,2]$. Des estimations asymptotiques de la décroissance de la norme pour les grands temps ont été obtenus par Vento [Ven10, Ven11] quand $\Omega = \mathbb{R}$ et, récemment, dans [MolVen10] quand $\Omega = \mathbb{T}(0,L)$, le tore sur $[0,L]$, aussi noté par $\mathbb{T}$ ; comme un modèle d'onde dissipative de *Tsunami*, Dutykh [Dut07] a considéré le cas $\alpha = 2$ (avec l'addition d'un amortissement non local en temps). Plusieurs questions sont ouvertes, en particulier le comportement pour les grands temps dans le cas périodique. Nous proposons ici d'explorer numériquement quelques questions relatives à la régularisation de temps, la vitesse de décroissance asymptotique des normes et également des implémentations numériques, dans le cas périodique lors de l'utilisation du développement spectral de Fourier pour la discrétisation en espace. A cette fin, nous considérons la famille d'amortissements non locaux

$$\mathcal{L}_{\gamma}(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \hat{u}_k e^{\frac{2i\pi kx}{L}}.$$

Ici $\hat{u}_k$ est le $k-$ième coefficient de Fourier de $u$ et $\gamma_k$ sont des nombres réels positifs de telle manière que nous avons

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}_{\gamma}(u) u \mathrm{d}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \left|\hat{u}_k\right|^2 \geq 0.$$

Cette expression d'amortissement permet de couvrir plusieurs situations bien identifiées. Par exemple, le choix $\gamma_k = \left|\frac{2\pi k}{L}\right|^{\alpha}$ correspond à $\mathcal{L}_{\gamma}(u) = |D|^{\alpha} u$. Cependant, plusieurs cas généraux peuvent être considérés et la suite $\gamma_k$ peut être choisit de manière à faire varier l'amortissement fréquence par fréquence ou par bande de fréquences.

Soit $f$ une fonction qui ne dépend que de la variable en espace $x$, nous considérons l'équation de KdV amortie et forcée :

$$u_t + u_{xxx} + \mathcal{L}_{\gamma}(u) + u u_x = f,\ x \in \mathbb{T}, t > 0, \tag{II.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{II.5}$$

Quand $\lim_{k \to +\infty} \gamma_k = +\infty$, (par exemple, $\gamma_k = k^2$ pour un amortissement parabolique [Dut07]), l'équation est régularisée en temps fini. Quand $\gamma_k$ est constante, *i.e.* $\mathcal{L}_{\gamma}(u) = \gamma u$, l'amortissement est dit "faible" et n'est pas régularisé en temps fini mais, comme démontré par Ghidaglia [Ghi88, Ghi94] et Goubet [Gou00, GouRosa02], il permet à l'équation d'avoir un attracteur de dimension fini qui est dans un espace plus régulier que la donnée initiale :

cela provient de la propriété de la régularisation asymptotique. Rosa et Cabral dans [CabRosa04] ont mis en évidence des dynamiques non triviales pour les grands temps pour des faibles valeurs de $\gamma$, ils ont calculé numériquement des solutions périodiques en temps.

Nous allons examiner numériquement le comportement pour les grands temps de l'équation de KdV amortie et forcée (II.4) - (II.5) pour différentes types de suites $\gamma_k$ avec une attention particulière quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$ : ce qui donne lieu à des amortissements plus faible ; que ceux mentionnés ci-dessus.
En effet, le terme $\int_0^L \mathcal{L}_\gamma(u)u\mathrm{d}x$ qui amortit la norme $L^2$ de la solution ne peut pas être contrôlé par la norme $L^2$ de la solution. Comme l'analyse semble tordue, nous regardons d'abord du côté numérique. Nous considérons en particulier les points suivants :

- calcul des taux d'amortissements pour différentes suites $\gamma_k$,
- mesure numérique de la régularité de Sobolev,
- calcul des solutions stationnaires et des solutions périodiques en temps.

## II.1.2 Le modèle

**Paramètres du problème**

Quand $u \in L^2(\mathbb{T})$, nous pouvons considérer son développement de Fourier et écrire

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{\frac{2i\pi kx}{L}}.$$

Nous définissons le terme d'amortissement non local (ou dissipatif) comme

$$\mathcal{L}_\gamma(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \hat{u}_k(t) e^{\frac{2i\pi kx}{L}}.$$

Pour des arguments de symétrie évidents ($\bar{\hat{u}}_{-k} = \hat{u}_{-k}$), nous supposerons dans la suite que $\gamma_k \in \mathbb{R}$ et que les relations $\gamma_k = \gamma_{-k}$ sont satisfaites pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}$.
L'équation KdV amortie que nous considérons ici est alors

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + \mathcal{L}_\gamma(u) + uu_x = f, x \in \mathbb{T}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{II.6}$$

Comme indiqué dans l'introduction, nous n'abordons pas ici à l'étude du problème de Cauchy. La présence de l'amortissement impose les propriétés de régularité des solutions et nous aurons au moins les mêmes propriétés de régularité du problème de Cauchy pour le problème de KdV non amortie. Le problème principal portera donc sur l'étude du gain de régularité due à l'amortissement en fonction du comportement asymptotique de la suite $\gamma_k$. En raison de la forme particulière de l'amortissement, nous avons besoin d'utiliser quelques familles d'espaces d'énergie adaptés : nous introduisons les notations suivantes

**Notations :**

- $H_\gamma = \{u \in L^2(\mathbb{T}) / \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k|^2 < +\infty\}$.
- $\dot{H}_\gamma = \{u \in H_\gamma(\mathbb{T}) / \int_0^L u dx = 0\} = \{u \in H_\gamma(\mathbb{T}) / \hat{u}_0 = 0\}$.
- Soient $(\gamma)_k$ et $(\delta)_k$ deux suites de nombres réels positifs. Nous notons $\gamma \leq \delta$ quand $\gamma_k \leq \delta_k,\ \forall k$.

La norme associée est $|u|_\gamma = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k|^2}$.
Finalement, nous noterons par $< .,. >$ le produit standard de $L^2$ et pour alléger l'écriture et puisque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons $L^2$ et $H_\gamma$ à la place de $L^2(\mathbb{T})$ et $H_\gamma(\mathbb{T})$, respectivement.

**Remarque 6.** *Soient $\gamma_k$ une série de nombres réels positifs. Il est facile de démontrer que $H_\gamma$ est un espace d'Hilbert muni du produit scalaire $(u,v)_\gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}$ et de la norme induite $|.|_\gamma = \sqrt{(.,.)_\gamma}$.*

*Soit $\alpha \geq \beta$ alors $H_\alpha \hookrightarrow H_\beta$, avec une injection continue.*
*Nous avons aussi l'inégalité*

$$< u, v > \leq |u|_\gamma |v|_{\frac{1}{\gamma}},\ \forall u \in H_\gamma, \forall v \in H_{\frac{1}{\gamma}},$$

*où nous avons fixé pour la convention* $\left(\frac{1}{\gamma}\right)_k = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_k} & si\ \gamma_k > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$.

**Remarque 7.** *On peut définir tout espace de Sobolev sous forme de $H_\gamma$*

$$H^s = \{u \in L^2 / \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+\lambda_k)^s |\hat{u}_k|^2 < +\infty\},$$

*où $\lambda_k$ sont les valeurs propres de $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec des conditions aux limites périodiques.*

*On a aussi*

$$\dot{H}^s = \dot{H}_{\lambda^s} = \{u \in H_{\lambda^s} / \int u dx = 0\}.$$

**Remarque 8.** *Quand $u \in L^2(\mathbb{T})$ et quand la suite $\gamma_k$ est dans $\ell^2$, le terme $\mathcal{L}_\gamma(u)$ peut être identifié à la série de Fourier du produit de convolution*

$$\mathcal{L}_\gamma(u)(x) = \Lambda * u,$$

*avec* $\Lambda(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{\frac{2i\pi x}{L}}$.

### L'équation homogène linéaire

Pour obtenir les estimations du propagateur associé à l'amortissement, Nous considérons d'abord l'équation linéaire

$$u_t + \mathcal{L}_\gamma(u) + u_{xxx} = 0; x \in \Omega, t > 0, \tag{II.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{II.8}$$

Supposons que $u(x,t) \in L^2(\mathbb{T}), \forall t > 0$. En considérant son développement en série de Fourier, nous avons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{d}\hat{u}_k(t)}{\mathrm{d}t} e^{\frac{2i\pi kx}{L}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\gamma_k + \left(\frac{2ik\pi}{L}\right)^3\right) \hat{u}_k(t) e^{\frac{2i\pi kx}{L}} = 0. \tag{II.9}$$

Par orthogonalité des polynômes trigonométriques, nous obtenons directement

$$\hat{u}_k(t) = e^{-\left(\gamma_k + (\frac{2ik\pi}{L})^3\right)t} \hat{u}_k(0). \tag{II.10}$$

D'où

$$|u|^2_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k(t)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\gamma_k t} |\hat{u}_k(0)|^2. \tag{II.11}$$

Nous pouvons maintenant passer aux limites.

**Proposition 9.** *Supposons que $\gamma_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ et que $u_0 \in H_{\frac{1}{\gamma}}$. Alors*

$$|u|^2_{L^2} \leq \min\left(\frac{e^{-1}}{2t}|u_0|^2_{\frac{1}{\gamma}}, |u_0|^2_{L^2}\right), \forall t > 0.$$

*Plus généralement, si $u_0 \in H_{\beta/\gamma}$ alors*

$$|u|^2_{\beta} \leq \frac{e^{-1}}{2t}|u_0|^2_{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

*Démonstration.* Nous avons, d'une part, en prenant le produit scalaire de l'équation (II.7) avec $u$ dans $L^2$,

$$\frac{\mathrm{d}|u|^2_{L^2}}{\mathrm{d}t} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k(t)|^2 = 0.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}|u|^2_{L^2}}{\mathrm{d}t} \leq 0,$$

par conséquent $|u|^2_{L^2} \leq |u_0|^2_{L^2}$. D'autre part nous avons, en résolvant directement l'équation (II.7), fréquence par fréquence,

$$|u|^2_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\gamma_k t} |\hat{u}_k(0)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\gamma_k e^{-2\gamma_k t}\right) \left(\frac{1}{\gamma_k}|\hat{u}_k(0)|^2\right)$$

La fonction

$$\gamma \to \gamma e^{-2\gamma t}$$

est à valeurs positives et uniformément bornée par $\dfrac{e^{-1}}{2t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'où

$$|u|^2_{L^2} \leq \frac{e^{-1}}{2t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k} |\hat{u}_k(0)|^2.$$

La deuxième inégalité est obtenue de la même façon en commençant par

$$\beta_k |\hat{u}_k(t)|^2 = \beta_k e^{-2\gamma_k t} |\hat{u}_k(0)|^2 = \gamma_k e^{-2\gamma_k t} \left(\frac{\beta_k}{\gamma_k}|\hat{u}_k(0)|^2\right).$$

D'où le résultat. □

Plus généralement, en utilisant les mêmes preuves élémentaires, nous pouvons établir

**Proposition 10.** *Supposons que* $\gamma_k \in [0,1], \forall k \in \mathbb{Z}$ *et que* $u_0 \in H_{\frac{1}{\gamma^s}}$. *Alors, pour tout* $s > 0$

$$|u|_{L^2}^2 \leq \min\left(e^{-s}\left(\frac{s}{2t}\right)^s |u_0|_{\frac{1}{\gamma^s}}^2, |u_0|_{L^2}^2\right), \forall t > 0.$$

*Démonstration.* En bornant uniformément la fonction $\gamma \to \gamma^s e^{-2\gamma t}$. □

Ce résultat simple signifie qu'une meilleur décroissance en temps est obtenue avec plus de régularisation de la donnée initiale. Nous pouvons démontrer que la norme $L^2$ décroît avec un taux polynomiale en supposant une régularité plus élevée des données initiales. On a plus précisément

**Proposition 11.** *Supposons qu'il existe* $\alpha, \beta$ *et* $C$, *trois nombres réels strictement positifs tel que*

*i.* $|\hat{u}_k(0)|^2 \leqslant C\gamma_k^{2\delta}$ *avec* $\delta = \alpha + \beta$.

*ii.* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^{2\beta} < +\infty$.

*Alors*

$$|u|_{L^2}^2 \leqslant Ce^{-1}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{2\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^{2\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

*En particulier, si* $\alpha > 1$, $|u|_{L^2}$ *décroît super linéairement en temps.*

*Démonstration.* Soit $|\hat{u}_k(0)|^2 \leqslant C\gamma_k^{2\delta}$ avec $\delta = \alpha + \beta$, alors en remplaçant dans (II.11), on obtient :

$$|u|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\gamma_k t}|\hat{u}_k(0)|^2 \leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\gamma_k t}\gamma_k^{2\delta} \leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e^{-2\gamma_k t}\gamma_k^{2\alpha}\right)\gamma_k^{2\beta}.$$

La fonction

$$\gamma \to \gamma^{2\alpha}e^{-2\gamma t}$$

est à valeurs positives et uniformément bornée par $e^{-1}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{2\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Ainsi

$$|u|_{L^2}^2 \leqslant Ce^{-1}\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{2\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^{2\beta}.$$

□

**L'équation homogène non linéaire**

Nous commençons avec le

**Lemme 12.** *Pour toute fonction* $v$ *dans* $H^3(\mathbb{T})$ *en espace, nous posons* $\bar{v}(t) = \frac{1}{L}\int_0^L v(x,t)dx$. *Supposons que* $\bar{f}(t) = 0$ *alors si* $u \in H^3(\mathbb{T})$, $\bar{u}(t) = e^{-\gamma_0 t}\bar{u}(0)$

*Démonstration.* Nous avons

$$\int_0^L u_{xxx}(x,t)\mathrm{d}x = 0 \text{ et } \int_0^L uu_x(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}u^2(x,t)\mathrm{d}x = 0.$$

D'où, en intégrant chaque terme de l'équation en espace sur l'intervalle $[0, L]$, nous avons

$$\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_\gamma(u)\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Mais $\displaystyle\int_0^L \mathcal{L}_\gamma(u)(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \hat{u}_k e^{\frac{2i\pi kx}{L}}\mathrm{d}x = L\gamma_0\hat{u}_0 = \gamma_0\int_0^L u\mathrm{d}x.$
Par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_0^L \mathcal{L}_\gamma(u)(x,t)\mathrm{d}x = 0,$$

ainsi, puisque $\displaystyle\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t) = \hat{u}_0$, nous avons

$$\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)\mathrm{d}x = e^{-t}\frac{1}{L}\int_0^L u(x,0)\mathrm{d}x.$$

En particulier, si $\bar{u}(0) = 0$ alors $\bar{u}(t) = 0,\ \forall t \geq 0.$ □

Nous prenons le produit scalaire dans $L^2$ de l'équation

$$u_t + \mathcal{L}_\gamma(u) + u_{xxx} + uu_x = 0;$$

et nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k(t)|^2 = 0. \tag{II.12}$$

Nous avons $|u|_\gamma^2 = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k(t)|^2$. Nous pouvons démontrer la

**Proposition 13.** *Supposons que $\gamma_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ et que $u_0 \in L^2$ avec $\displaystyle\int_0^L u_0(x)dx = 0$. Supposons que $u \in L^2 \cap H_\gamma$ pour tout $t > 0$. Alors $u = 0$ est le seul point critique du système et il est asymptotiquement stable. Plus précisément*

*i.* $\lim_{t\to+\infty} |u|_{L^2} = 0.$

*ii. En plus, si $\exists c > 0$ tel que $\gamma_k \geq c > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ alors $|u|_{L^2} \leq e^{-ct}|u_0|_{L^2}$.*

*Démonstration.* Pour la première affirmation, nous notons que

$$\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} \leq 0,$$

d'où $|u(t)|_{L^2} \leq |u_0|_{L^2}, \forall t \geq 0$ et $t \to |u(t)|_{L^2}$ est décroissante en temps, en conséquence $\lim_{t\to\infty} |u(t)|_{L^2}^2 = C$. Supposons une régularité suffisante pour $u$, nous déduisons $\lim_{t\to\infty} |u(t)|_\gamma^2 = 0.$

Maintenant, puisque $\gamma_k > 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} \hat{u}_k = 0$ et $u = 0$ *p.p.*, ceci implique $C = 0$.

L'estimation [*ii.*] est obtenue par une application simple du lemme de Gronwall : si $\gamma_k \geq c > 0$, alors $|u|_\gamma \geq c|u|^2_{L^2}$ et nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|^2_{L^2}}{\mathrm{d}t} + c|u|^2_{L^2} \leq 0,$$

ainsi, par intégration, nous obtenons directement

$$|u|^2_{L^2} \leq e^{-2ct}|u_0|^2_{L^2}.$$

Par suite

$$\lim_{t\to+\infty} |u|_{L^2} = 0.$$

□

**Corollaire 14.** *Supposons que $u \in H^3 \cap H_\gamma$ et que $u_0 \in H^3$. Supposons aussi que $\gamma_k > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma_0 = 0$ et $u_0 \in L^2$. Alors*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \hat{u}_0 = \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)\,dx.$$

*Démonstration.* Il suffit d'introduire $v = u - \hat{u}_0$ et de combiner le Lemme 12 et la proposition 13. □

Quand les $\gamma_k$ ne sont pas minorés uniformément par une constante positive, l'orbite converge vers 0 dans la norme $L^2$, mais à une vitesse qui peut être arbitrairement lente. Cela dépend de la façon dont $\gamma_k$ tend vers 0 quand $k$ tend vers l'infini mais aussi de la décomposition de Fourier de la données initiale (cf. Figures II.4 et II.5).
La principale difficulté vient du fait que, quand $\gamma_k$ converge vers 0 quand $|k|$ tend vers l'infini, il n'y a pas d'injection de $H_\gamma$ vers $L^2$. Ainsi, le rapport des deux normes associées de la solution joue un rôle important comme souligné ci-après. On introduit la fonction

$$G(u,t) \mapsto G(u,t) = \frac{|u|_\gamma}{|u|_{L^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k|\hat{u}_k|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2}},$$

et dans la pratique nous utiliserons $G(t)$ pour $G(u,t)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

**Proposition 15.** *Soit $u(x,t)$ une solution régulière de l'équation homogène (II.6). Nous supposons que $G(u,t)$ est $\mathcal{C}^1$ en $t$. Alors nous avons les estimations*

- $|u(t)|^2_{L^2} = e^{-2\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|^2_{L^2}$,
- $|u(t)|^2_\gamma = G^2(t)e^{-2\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|^2_{L^2}$.

*En particulier, $\lim_{t\to+\infty} |u|_{L^2} = 0$ si et seulement si $t \mapsto G(t) \notin L^2_t(0,+\infty)$.*

*Démonstration.* Comme ci-dessus, en prenant le produit scalaire de l'équation (II.6) dans $L^2$ avec $u$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} + |u|_\gamma^2 = 0.$$

Nous avons par définition de $G$ : $|u|_\gamma^2 = G^2(t)|u|_{L^2}^2$. D'où

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} + G^2(t)|u|_{L^2}^2 = 0,$$

de ceci, nous déduisons directement

$$|u(t)|_{L^2}^2 = e^{-2\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|_{L^2}^2. \tag{II.13}$$

Ainsi $\lim_{t\to\infty}|u|_{L^2} = 0$ si et seulement si $t \mapsto G(t) \notin L_t^2(0,+\infty)$. L'estimation en norme $H_\gamma$ suit directement avec la définition de $G$. Nous avons

$$|u(t)|_\gamma^2 = G^2(t)e^{-2\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|_{L^2}^2. \tag{II.14}$$

Nous déduisons de la proposition 13 que, puisque $\lim_{t\to\infty}|u|_\gamma = 0$, alors

$$\lim_{t\to\infty} G^2(t)e^{-2\int_0^t G^2(s)ds} = 0.$$

□

La condition $G(t) \notin L_t^2(0,+\infty)$ est bien sûr satisfaite automatiquement quand $H_\gamma \subset L^2$ avec une injection continue ou, de façon équivalente, quand $\gamma_k$ sont bornées uniformément inférieurement par une constante strictement positive. Dans un tel cas, $G(t)$ est minorée et $|u|_{L^2}$ converge vers zéro avec un taux exponentiel quand $t$ tend vers l'infini. Dans le cas opposé, *i.e.* quand $\lim_{k\to\infty}\gamma_k = 0$, selon la proposition précédente, nous avons encore $G(t) \notin L_t^2(0,+\infty)$ mais nous ne pouvons pas obtenir le taux de convergence de $|u|_{L^2}$ vers 0. Ces points sont décisifs pour prouver l'existence de bornés absorbants, (voir [Tem97]).

### L'équation non linéaire forcée

Notre but ici est d'explorer numériquement le comportement des grands temps des solutions de l'équation amortie et forcée, et particulièrement de regarder les dynamiques possibles et non triviales dans ce cas.
Tout d'abord, et comme ci-dessus, nous obtenons les estimations des normes $L^2$ et $H_\gamma$ :

**Proposition 16.** *Supposons que $f$ appartient à $H_{\frac{1}{\gamma}}$ et que $u_0 \in L^2 \cap H_\gamma$. Alors*

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq e^{-\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-\int_s^t G^2(\tau)d\tau}|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 ds.$$

*Démonstration.* En prenant le produit scalaire de l'équation (II.6) dans $L^2$ avec $u$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} + |u|_\gamma^2 = < f, u > .$$

Maintenant,

$$| < f, u > | \leq | f|_{\frac{1}{\gamma}} |u|_\gamma.$$

D'où, en introduisant $G(t)$ et en utilisant l'inégalité de Young,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|u|_{L^2}^2}{\mathrm{d}t} + G^2(t)|u|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 + \frac{\varepsilon}{2}|u|_\gamma^2 = \frac{1}{2\varepsilon}|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 + \frac{\varepsilon}{2}G^2(t)|u|_{L^2}^2,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Avec $\varepsilon = 1$ nous obtenons, par le lemme de Gronwall

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq e^{-\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-\int_s^t G^2(\tau)d\tau}|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 ds. \tag{II.15}$$

Dans la même façon, nous obtenons des estimations dans $H_\gamma$, en multipliant chaque terme par $G^2(t)$

$$|u(t)|_\gamma^2 \leq G^2(t)e^{-\int_0^t G^2(s)ds}|u_0|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-\int_s^t G^2(\tau)d\tau}G^2(t)|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2 ds. \tag{II.16}$$

□

Nous déduisons immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire 17.** *Nous faisons les hypothèses de la proposition précédente. De plus, nous supposons que la fonction*

$$F : t \mapsto \int_0^t e^{-\int_s^t G^2(\tau)d\tau} ds$$

*est uniformément bornée dans $t$. Alors l'équation possède un borné absorbant dans $L^2$.*

Cependant le temps de convergence vers ce borné absorbant, dépend du spectre de $\hat{u}_0$ et pas seulement de $|u_0|_{L^2}$.

### II.1.3 Schémas numériques

#### Discrétisation en espace

Puisque les conditions aux limites sont périodiques, il est naturel de considérer une approximation en espace de type Fourier, en plus dans ce cas le calcul des termes d'amortissement non local sera aisé. Nous allons développer une discrétisation en espace pseudo-spectral de type Fourier classique tel que décrit dans [GotOrs97]. Pour compléter la discrétisation nous avons besoin de définir un "bon" schéma en temps robuste, comme suit.

#### Schémas en temps

Nous présentons ci-après quatre schémas en temps implicites/semi-implicites pour l'équation de KdV amortie :
- Euler implicite,
- Crank Nicolson,
- Sanz-Serna,
- splitting de Strang,
- splitting.

Nous les écrivons en ne considérant que la semi discrétisation en temps et donnons pour trois d'entre eux des résultats de stabilité $L^2$ qui restent valables quand l'approximation de dimension finie en espace est considérée : ceci est simplement dû à la propriété d'orthogonalité des polynômes d'interpolation trigonométrique.
Finalement, nous avons besoin de résoudre numériquement à chaque pas de temps un problème de point fixe. Cela peut-être réalisé en utilisant l'itération classique de Picard.

**Remarque 18.** *Dans certaines situations, par exemple s'agissant du schéma de Sanz-Serna, la méthode de point fixe de Picard a besoin d'un petit pas de temps $\Delta t$ pour converger : ceci est artificiel puisque le schéma est inconditionnellement $L^2$-stable. Cet inconvénient peut être contourné en utilisant d'autres solveurs de point fixe comme Lemarechal ou Marder-Weitzner qui ont une meilleure stabilité, comme proposé dans [AboAlmChehDumGou08].*

#### Euler implicite

Comme premier schéma numérique, nous proposons

$$\frac{u^{(n+1)}-u^{(n)}}{\Delta t}+\mathcal{L}_\gamma(u)^{(n+1)}+\mathcal{D}^3u^{(n+1)}+\frac{1}{2}\mathcal{D}(u^{(n+1)})^2=f. \tag{II.17}$$

Ici $\mathcal{D}$ est l'opérateur linéaire symétrique de la première dérivée en espace ou de sa discrétisation. Nous prouvons le résultat suivant :

**Proposition 19.** *Suposons que $u^{(0)}=u_0\in L^2$ et $f\in H_{\frac{1}{\gamma}}$. Alors la suite $u^{(n)}$ générée par le schéma Euler implicite est bien définie, appartient dans $L^2$ et*

$$|u^{(n+1)}|_2^2+|u^{(n+1)}-u^{(n)}|_2^2+\Delta t\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k|\hat{u}_k^{(n+1)}|^2\leq|u^{(n)}|_2^2+\Delta t\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\gamma_k}|\hat{f}_k|^2.$$

*De plus si $f=0$, alors $\lim_{n\to+\infty}|u^{(n)}|_{L^2}=0$.*

*Démonstration.* En utilisant l'égalité

$$< u^{(n+1)} - u^{(n)}, u^{(n+1)} >= -\frac{1}{2}\left(|u^{(n)}|_2^2 - |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_2^2 - |u^{(n+1)}|_2^2\right),$$

nous obtenons après des calculs usuels

$$|u^{(n+1)}|_2^2 + |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_2^2 + 2\Delta t < \mathcal{L}_\gamma(u)^{(n+1)}, u^{(n+1)} >= |u^{(n)}|_2^2 + 2\Delta t < u^{(n+1)}, f > \quad \text{(II.18)}$$

où

$$< \mathcal{L}_\gamma(u)^{(n+1)}, u^{(n+1)} >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k^{(n+1)}|^2 \geq 0.$$

A ce stade, nous utilisons l'inegalité de Young

$$< u^{(n+1)}, f >\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k^{(n+1)}|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k}|\hat{f}_k|^2,$$

pour $\varepsilon > 0$ qui sera fixé ultérieurement. D'où

$$|u^{(n+1)}|_2^2 + |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_2^2 + 2\Delta t(1 - \frac{\varepsilon}{2})\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k^{(n+1)}|^2 \leq |u^{(n)}|_2^2 + 2\Delta t\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k}|\hat{f}_k|^2.$$

D'où le résultat avec $\varepsilon = 1$.

Si $f = 0$, l'identité (II.18) devient

$$|u^{(n+1)}|_2^2 + |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_2^2 + 2\Delta t|u^{(n+1)}|_\gamma^2 = |u^{(n)}|_2^2. \quad \text{(II.19)}$$

D'où, la suite $|u^{(n)}|_2$ est décroissante, bornée inférieurement par 0, puis convergente vers $C$. Il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k |\hat{u}_k^{(n)}|^2 = 0.$$

Par conséquent, puisque $\gamma_k > 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \hat{u}_k^{(n)} = 0$ et alors $C = 0$. □

Nous donnons aussi une version discrète de la proposition 19 :

**Proposition 20.** *Soit $u^{(n)}$ une série générée par le schéma d'Euler implicite. Nous posons $G^{(n)} = \frac{|u^{(n)}|_\gamma}{|u^{(n)}|_{L^2}}$. Nous avons*

$$|u^{(n)}|_{L^2}^2 \leq \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + 2\Delta t(G^{(j)})^2}\right)|u_0|_{L^2}^2.$$

*De plus, pour $\Delta t$ assez petit, si $(G^{(j)})_{j\in\mathbb{Z}} \notin \ell^2$, alors $\lim_{n\to+\infty} |u^{(n)}|_{L^2} = 0$.*

*Démonstration.* En prenant le produit scalaire dans $L^2$ avec $u^{(n+1)}$ nous obtenons

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(|u^{(n+1)}|_{L^2}^2 - |u^{(n)}|_{L^2}^2 + |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_{L^2}^2\right) + (G^{(n+1)})^2|u^{(n+1)}|_{L^2}^2 = 0.$$

Par conséquent

$$(1 + 2\Delta t(G^{(n+1)})^2)|u^{(n+1)}|_{L^2}^2 + |u^{(n+1)} - u^{(n)}|_{L^2}^2 \leq |u^{(n)}|_{L^2}^2.$$

Maintenant, pour $\Delta t$ assez petit nous avons

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+2\Delta t(G^{(j)})^2}\right) = -\sum_{j=1}^{n}\log(1+2\Delta t(G^{(j)})^2) \simeq -2\Delta t\sum_{j=1}^{n}(G^{(j)})^2.$$

D'où, si $G^{(j)} \notin \ell^2$ alors $\lim_{n\to+\infty}|u^{(n)}|_{L^2} = 0$. □

**Schéma de Crank-Nicolson**

Le schéma classique de Crank-Nicolson s'écrit comme

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{L}_\gamma\left(\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}\right) + \mathcal{D}^3\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2} + \frac{1}{4}\mathcal{D}\left((u^{(n+1)})^2 + (u^{(n)})^2\right) = f, \quad \text{(II.20)}$$

avec les notations comme ci-dessus. Ce schéma est du second ordre en temps. Ici nous n'avons pas

$$\left\langle \mathcal{D}\left((u^{(n+1)})^2 + (u^{(n)})^2\right), \frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}\right\rangle = 0,$$

ainsi nous ne pouvons pas tirer les bornes $L^2$ uniforme pour $u^{(n)}$ à partir du schéma. Cependant dans la pratique, ce schéma donne des résultats numériques satisfaisants, (section II.1.4).

**Schéma de Sanz-Serna**

Le schéma de Sanz-Serna est du second ordre en temps et correspond à une formule de quadrature du point milieu dans l'évaluation du champ de vecteur, [DurSs00]. Il s'écrit ici comme

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{L}_\gamma\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2} + \mathcal{D}^3\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{D}\left(\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}\right)^2 = f, \quad \text{(II.21)}$$

avec toujours les même notations.

**Proposition 21.** *Supposons que $u_0 \in L^2$ et $f \in L^2 \cap H_\gamma$. Alors le schéma (II.21) est stable dans $L^2$ pour tout $\Delta t > 0$.*

*Démonstration.* Nous prenons le produit scalaire dans $L^2$ de chaque terme de (II.21) avec $\dfrac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}$ et nous obtenons

$$\frac{|u^{(n+1)}|_{L^2}^2 - |u^{(n)}|_{L^2}^2}{2\Delta t} + \frac{1}{4}|u^{(n+1)} + u^{(n)}|_\gamma^2 = \left\langle f, \frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}\right\rangle.$$

Ainsi, en utilisant la dualité et l'inégalité de Young, nous avons

$$\frac{|u^{(n+1)}|^2_{L^2} - |u^{(n)}|^2_{L^2}}{2\Delta t} + \frac{1}{4}|u^{(n+1)} + u^{(n)}|^2_\gamma \leq \frac{1}{2}|f|^2_{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{2}\left|\frac{u^{(n+1)} + u^{(n)}}{2}\right|^2_\gamma.$$

Finalement, après les simplifications usuelles

$$|u^{(n+1)}|^2_{L^2} + \frac{\Delta t}{4}|u^{(n+1)} + u^{(n)}|^2_\gamma \leq |u^{(n)}|^2_{L^2} + \Delta t|f|^2_{\frac{1}{\gamma}}.$$

D'où la stabilité $L^2$ dans chaque intervalle de temps $[0, T]$. □

Le schéma (II.21) est en effet du second ordre et il est stable dans $L^2$ mais nous ne pouvons pas établir les propriétés de contraction comme pour le schéma d'Euler implicite qui est seulement du premier ordre. En effet, avec $f = 0$, nous obtenons seulement la relation

$$|u^{(n+1)}|^2_{L^2} + \frac{\Delta t}{4}|u^{(n+1)} + u^{(n)}|^2_\gamma = |u^{(n)}|^2_{L^2},$$

qui implique que $|u^{(n)}|_{L^2}$ est décroissante (puis convergente) mais nous ne pouvons pas conclure que la limite est 0. Afin d'établir la précision et les propriétés de contraction nous considérons dans la suite un schéma basé sur un splitting de Strang.

**Un schéma en temps de splitting de Strang**

L'idée principale d'un schéma de splitting de Strang est de traiter séparément l'intégration en temps d'une part, de la partie purement dispersive de l'équation et de l'amortissement, et, d'autre part, on implémente le splitting de Strang classique comme suit (noté par *SpSt* dans la suite) :

$$u^{(n+1/3)} = e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_\gamma} u^{(n)}, \quad \text{(II.22)}$$

$$\frac{u^{(n+2/3)} - u^{(n+1/3)}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\mathcal{D}^3\left(u^{(n+2/3)} + u^{(n+1/3)}\right) + \frac{1}{8}\mathcal{D}((u^{(n+2/3)} + u^{(n+1/3)})^2) = f, \quad \text{(II.23)}$$

$$u^{(n+1)} = e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_\gamma} u^{(n+2/3)}. \quad \text{(II.24)}$$

Ici, l'opérateur $\mathcal{S}_\gamma = e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_\gamma}$ est pour tout $u \in L^2(\mathbb{T})$ comme

$$\mathcal{S}_\gamma u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_\gamma}\hat{u}_k e^{\frac{2i\pi kx}{L}}.$$

Quand on utilise une intégration exacte en temps pour (II.22) - (II.24), le splitting de Strang est du second ordre. Les étapes (II.22) et (II.24) correspondent à l'intégration exacte tandis que (II.23) est de type Sanz Serna qui est du second ordre. D'où les résultats présentés plus bas (cf. Figures II.4 et II.5). Sur ce point nous obtenons les bornes de stabilité.

**Proposition 22.** *Supposons que $\gamma_k > 0, \forall k$ et $u^{(0)} \in L^2$. Alors la suite $u^{(n)}$ générée par le schéma (II.22)-(II.23)-(II.24) est bien définie et le schéma est inconditionnellement stable dans $L^2$. Si $f = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} |u^{(n)}|_{L^2} = 0$. De plus, nous avons les estimations suivantes*

– *Si* $\exists c > 0,\ \gamma_k \geq c > 0, \forall k$, *alors*

$$|u^{(n)}|_{L^2} \leq \delta^{2n}|u^{(0)}|_{L^2} + \Delta t\delta\frac{1}{1-\delta^2}|f|_{L^2} \text{ avec } \delta = e^{-\frac{\Delta tc}{2}}.$$

– *Si* $u^{(0)} \in L^2 \cap H_{\frac{1}{\gamma}}$ *et* $f = 0$ *alors*

$$|u^{(n)}| \leq \frac{e^{-1}}{N\Delta t}|u^{(0)}|_{\frac{1}{\gamma}}.$$

*Démonstration.* Nous supposons tout d'abord $\gamma_k \geq \gamma = cst, \forall k \in \mathbb{Z}$. Nous avons alors $|\mathcal{S}_\gamma u|_{L^2} \leq e^{-\frac{\Delta t\gamma}{2}}|u|_{L^2} = \delta|u|_{L^2}$. Nous obtenons directement les relations

$$|u^{(n+1/3)}|_{L^2} \leq \delta|u^{(n)}|_{L^2} \text{ et } |u^{(n+1)}|_{L^2} \leq \delta|u^{(n+2/3)}|_{L^2}.$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2$ de chaque terme de (II.23) avec $u^{(n+2/3)} + u^{(n+1/3)}$, nous obtenons

$$|u^{(n+2/3)}|^2_{L^2} - |u^{(n+1/3)}|^2_{L^2} \leq \Delta t < f, u^{(n+2/3)} + u^{(n+1/3)} > \leq \Delta t|f| \left(|u^{(n+2/3)}|_{L^2} + |u^{(n+1/3)}|_{L^2}\right),$$

par conséquent

$$|u^{(n+2/3)}|_{L^2} - |u^{(n+1/3)}|_{L^2} \leq \Delta t|f|_{L^2}.$$

Finalement

$$|u^{(n+1)}|_{L^2} \leq \delta|u^{(n+2/3)}|_{L^2} \leq \delta\left(\delta|u^{(n)}|_{L^2} + \Delta t|f|_{L^2}\right).$$

En résumé

$$|u^{(n+1)}|_{L^2} \leq \delta^2|u^{(n)}|_{L^2} + \Delta t\delta|f|_{L^2},$$

et par récurrence nous obtenons

$$|u^{(n)}|_{L^2} \leq \delta^{2n}|u^{(0)}|_{L^2} + \Delta t\delta\frac{1}{1-\delta^2}|f|_{L^2},$$

d'où la stabilité $L^2$ uniforme, la suite $u^{(n)}$ est bien définie dans $L^2$. Aussi, nous tirons de la relation précédente que si $f = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} |u^{(n)}|_{L^2} = 0$.

Etudions maintenant le cas général $\gamma_k > 0$, avec éventuellement $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$. Nous devons d'abord montrer que, pour tout $v \in L^2$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} |\mathcal{S}^N_\gamma v|_{L^2} = 0.$$

Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 23.** *Soit* $v \in L^2$. *Alors*

$$\lim_{N\to+\infty} |\mathcal{S}^N_\gamma v|_{L^2} = 0.$$

*En plus, si* $v \in L^2 \cap H_{\frac{1}{\gamma}}$ *nous avons l'estimation*

$$|\mathcal{S}^N_\gamma v|_{L^2} \leq 2\frac{e^{-1}}{N\Delta t}|v|_{\frac{1}{\gamma}}.$$

*Démonstration.* Puisque $v \in L^2$, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N \geq N_1, \sum_{|k|>N_1} |\hat{v}_k|^2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}M}.$$

où nous avons posé $M = |v|_{L^2}$. Maintenant, nous écrivons $\mathcal{S}^N v$ comme

$$|\mathcal{S}^N v|_{L^2}^2 = \sum_{|k|\leq N_1} e^{-N\Delta t\gamma_k}|\hat{v}_k|^2 + \sum_{|k|>N_1} e^{-N\Delta t\gamma_k}|\hat{v}_k|^2.$$

La deuxième partie est majorée par $\dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Maintenant, puisque $N_1$ est fixée, on définit $\underline{\gamma}$ comme $\underline{\gamma} = \inf\limits_{|k|\leq N_1} \gamma_k > 0$. Nous pouvons écrire

$$\sum_{|k|\leq N_1} e^{-N\Delta t\gamma_k}|\hat{v}_k|^2 \leq e^{-N\Delta t\underline{\gamma}}M^2.$$

Finalement pour le même $\varepsilon > 0$, il existe $N_2$ tel que pour tout $N \geq N_2$, $e^{-N\Delta t\underline{\gamma}} < \dfrac{\varepsilon^2}{2M^2}$. En additionnant ces inégalités, nous obtenons le résultat. Notons que nous n'avons aucune estimation pour le taux de décroissance ; le taux dépend à la fois de $v$ et $\gamma$.

Supposons maintenant que $v \in L^2 \cap H_{\frac{1}{\gamma}}$. En procédant exactement comme dans la proposition 9, nous obtenons

$$|\mathcal{S}_\gamma^N v|_{L^2} \leq \frac{e^{-1}}{N\Delta t}|v|_{\frac{1}{\gamma}}.$$

On obtient ainsi la preuve du lemme. □

Revenons maintenant au schéma en temps. Nous avons les relations

$$u^{(n+1/3)} = \mathcal{S}_\gamma u^{(n)}, \tag{II.25}$$

$$|u^{(n+2/3)}|_{L^2} \leq |u^{(n+1/3)}|_{L^2} + \Delta t|f|_{L^2}, \tag{II.26}$$

$$u^{(n+1)} = \mathcal{S}_\gamma u^{(n+2/3)}. \tag{II.27}$$

Par conséquent

$$|u^{(n+1)}|_{L^2} \leq \Delta t|f|_{L^2} + |\mathcal{S}u^{(n)}|_{L^2}.$$

La stabilité $L^2$ suit par récurrence puisque $|\mathcal{S}_\gamma u^{(n)}|_{L^2} \leq |u^{(n)}|_{L^2}$. Maintenant, si $f = 0$, nous avons directement

$$|u^{(n)}|_{L^2} \leq |\mathcal{S}^n u^{(0)}|_{L^2}$$

et nous concluons avec le lemme précédent. □

Le schéma de splitting combine donc à la fois le second ordre de précision en temps (comme Crank-Nicolson ou Sanz-Serna) et des propriétés de stabilité $L^2$ similaires à Euler implicite. Nous illustrons ces propriétés dans les simulations numériques.

**Remarque 24.** *Le schéma splitting (que nous notons Sp)*

$$\frac{u^{(n+1/3)}-u^{(n)}}{\Delta t/2}+\mathcal{L}_\gamma(u)^{(n+1/3)}=0, \tag{II.28}$$

$$\frac{u^{(n+2/3)}-u^{(n+1/3)}}{\Delta t}+\mathcal{D}^3u^{(n+2/3)}+\frac{1}{2}\mathcal{D}(u^{(n+2/3)})^2=f, \tag{II.29}$$

$$\frac{u^{(n+1)}-u^{(n+2/3)}}{\Delta t/2}+\mathcal{L}_\gamma(u)^{(n+1)}=0, \tag{II.30}$$

*a des propriétés de stabilité $L^2$. Supposons en effet que $f\in H_{\frac{1}{\gamma}}\cap L^2$, nous pouvons montrer que*

$$|u^{(n)}|_{L^2}^2+\Delta t\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|_\gamma^2\leq|u_0|_{L^2}^2+2T\left(|f|_{L^2}^2+|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2\right),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

*Cependant, ce schéma n'est que d'ordre un en temps, toutes les trois étapes étant seulement du premier ordre en temps, (Section II.1.4 ci-après).*

**Proposition 25.** *Supposons que $f\in L^2\cap H_{\frac{1}{\gamma}}$ et que $u^{(0)}=u_0\in L^2$. Alors, la suite $u^{(n)}$ générée par le schéma (II.22)-(II.24) est bien définie et satisfait l'estimation*

$$|u^{(n+1)}|_{L^2}^2+\Delta t|u^{(n+1)}|_\gamma^2\leq|u^{(n)}|_{L^2}^2+2\Delta t\left(|f|_{L^2}^2+|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2\right).$$

*En particulier, le schéma est inconditionnellement stable dans $L^2$. De plus si $f=0$ et $\int u_0(x)dx=0$, alors $\lim_{n\to+\infty}|u^{(n)}|_{L^2}=0$.*

*Démonstration.* Nous prenons le produit scalaire dans $L^2$ avec $u^{(n+1/3)}, u^{(n+2/3)}$ et $u^{(n+1)}$ avec (II.22), (II.23) et (II.24) respectivement. Nous obtenons

$$\frac{1}{2}\left(|u^{(n+1/3)}|_{L^2}^2-|u^{(n)}|_{L^2}^2+|u^{(n+1/3)}-u^{(n)})|_{L^2}^2\right)+\frac{\Delta t}{2}|u^{(n+1/3)}|_\gamma^2=0, \tag{II.31}$$

$$\frac{1}{2}\left(|u^{(n+2/3)}|_{L^2}^2-|u^{(n+1/3)}|_{L^2}^2+|u^{(n+2/3)}-u^{(n+1/3)})|_{L^2}^2\right)=\Delta t<f,u^{(n+2/3)}>, \tag{II.32}$$

$$\frac{1}{2}\left(|u^{(n+1)}|_{L^2}^2-|u^{(n+2/3)}|_{L^2}^2+|u^{(n+1)}-u^{(n+2/3)})|_{L^2}^2\right)+\frac{\Delta t}{2}|u^{(n+1)}|_\gamma^2=0. \tag{II.33}$$

Nous prenons la somme de ces égalités et obtenons

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(|u^{(n+1)}|_{L^2}^2-|u^{(n)}|_{L^2}^2+|u^{(n+1/3)}-u^n)|_{L^2}^2+|u^{(n+2/3)}-u^{(n+1/3)})|_{L^2}^2+|u^{(n+1)}-u^{n+2/3)}|_{L^2}^2\right)\\ +\frac{\Delta t}{2}\left(|u^{(n+1)}|_\gamma^2+|u^{(n+1/3)}|_\gamma^2\right)=\Delta t<f,u^{(n+2/3)}>.\end{array}$$

En utilisant la linéarité, le produit de dualité et l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}\left\langle f,u^{(n+2/3)}\right\rangle&=\left\langle f,u^{(n+2/3)}-u^{(n+1/3)}\right\rangle+\left\langle f,u^{(n+1/3)}\right\rangle\\&\leq\tfrac{1}{2\varepsilon}|f|_{L^2}^2+\tfrac{\varepsilon}{2}|u^{(n+2/3)}-u^{(n+1/3)})|_{L^2}^2+\tfrac{1}{2\eta}|f|_{\frac{1}{\gamma}}^2+\tfrac{\eta}{2}|u^{(n+1/3)})|_\gamma^2,\end{aligned}$$

où $\varepsilon$ et $\eta$ sont des constantes réelles strictement positives ou nulles ; elles seront fixées plus bas. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(|u^{(n+1)}|^2_{L^2} - |u^{(n)}|^2_{L^2}\right) + \Delta t|u^{(n+1)}|^2_\gamma + \left(\tfrac{\Delta t}{2} - \tfrac{\Delta t\eta}{2}\right)|u^{(n+1/3)}|^2_\gamma \\
&\qquad\qquad \leq \tfrac{1}{2\varepsilon}|f|^2_{L^2} + \tfrac{1}{2\eta}|f|^2_{\frac{1}{\gamma}}. \\
&+\left(1 - \tfrac{\varepsilon\Delta t}{2}\right)\left(|u^{(n+1/3)} - u^{(n)})|^2_{L^2} + |u^{(n+2/3)} - u^{(n+1/3)})|^2_{L^2}\right. \\
&\left.+|u^{(n+1)} - u^{(n+2/3)})|^2_{L^2}\right)
\end{aligned}$$

Nous prenons maintenant $\varepsilon = 1$ et $\eta = \frac{1}{2\Delta t}$ et, après les simplifications usuelles, nous obtenons l'inégalité

$$|u^{(n+1)}|^2_{L^2} - |u^{(n)}|^2_{L^2} + 2\Delta t|u^{(n+1)}|^2_\gamma \leq 2\Delta t\left(|f|^2_{L^2} + |f|^2_{\frac{1}{\gamma}}\right).$$

Si nous prenons la somme sur $n$ de ces inégalités, pour $n = 0, \cdots N_T$, nous obtenons que

$$|u^{(n)}|^2_{L^2} + 2\Delta t\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2_\gamma \leq |u_0|^2_{L^2} + 2T\left(|f|^2_{L^2} + |f|^2_{\frac{1}{\gamma}}\right),$$

où nous avons posé $T = N_T\Delta t$. D'où la stabilité inconditionnelle de $L^2$.
Maintenant, si $f = 0$, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned}
&|u^{(n+1)}|^2_{L^2} + |u^{(n+1/3)} - u^{(n)})|^2_{L^2} + |u^{(n+2/3)} - u^{(n+1/3)})|^2_{L^2} + |u^{(n+1)} - u^{(n+2/3)}|^2_{L^2} \\
&\qquad\qquad = |u^{(n)}|^2_{L^2}. \\
&+\Delta t\left(|u^{(n+1)}|^2_\gamma + |u^{(n+1/3)}|^2_\gamma\right)
\end{aligned}$$

La suite $|u^{(n)}|^2_{L^2} \geq 0$ est décroissante puis convergente vers la limite $C$. En passant à la limite, nous obtenons que

$$\lim_{n\to+\infty}|u^{(n)}|_\gamma = 0.$$

Avec les hypothèses $\gamma_k > 0$ et $\bar{u} = 0$ nous obtenons le résultat. □

**Implémentation**

Les schémas présentés ci-dessus sont implicites ou semi-implicites et le problème de point fixe doit être résolu à chaque itération qui peut être écrit comme

$$u^{(n+1)} = \Phi(\Delta t, u^{(n)}, u^{(n+1)}), \tag{II.34}$$

où la définiton de $\Phi$ dépend du choix du schéma en temps. La méthode la plus simple pour résoudre (II.34) est l'itération de Picard :

```
Pour n=0 ···
Posons        v^(0) = u^(n), m = 0
              tant que ‖φ(Δt, u^(n), v^(m)) − v^(m)‖ > ε.
              v^(m+1) = Φ(Δt, u^(n), v^(m))
              m = m + 1
              Fin tant que
Posons        u^(n+1) = v^(m)
Fin pour
```

Ici $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre fixé, par exemple $\varepsilon = 1.e-12$.
Dans toutes les simulations, nous avons fait l'itération classique de Picard suffisamment pour converger en très peu d'itération.

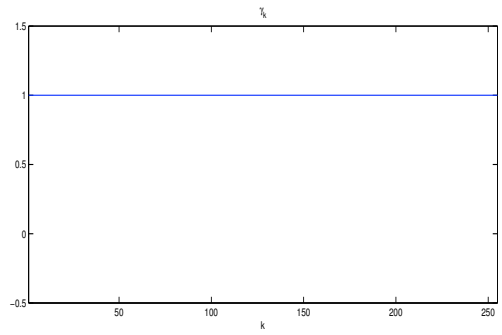
### II.1.4 Résultats numériques

Les résultats présentés ici ont été obtenus en utilisant le logiciel Matlab®. Nous avons utilisé le schéma de Crank-Nicolson et l'itération de Picard standard pour résoudre le point fixe à chaque pas. Les autres schémas (Euler, Sanz-Serna, splitting de Strang $SpSt$ et splitting $Sp$) donnent des résultats comparables.

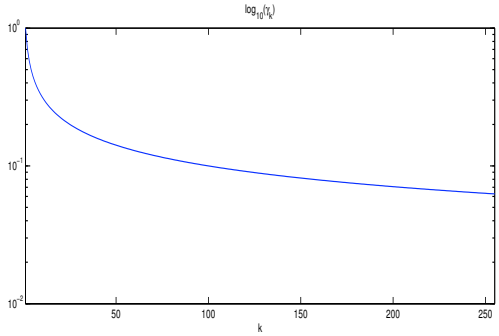
Nous appliquons maintenant cette technique pour l'équation de KdV amortie forcée pour différentes suites $\gamma_k$ et plus précisément :

- amortissement constant $\gamma_k = 1, \forall k$,
- amortissement à bandes limitées : $\gamma_k = \chi_{k_1 \leq k \leq k_2}$,
- amortissement de type peigne : $\gamma_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est paire} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$,
- $\gamma_k > 0$ avec $\lim_{k \to +\infty} \gamma_k = 0$, tel que $\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^\alpha}$, avec $\alpha = 1/4, 1, 2, \cdots$

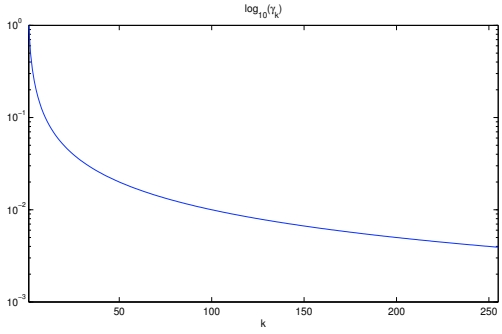
Maintenant, on justifie le choix des coefficients d'amortissement $\gamma_k$. Quand $\gamma_k$ décroît très lentement vers 0, *i.e.* pour $\gamma_k = 1/\ln(1 + |k|)$, la norme $L^2$ de la solution converge vers 0 quand $t$ tends vers $+\infty$ avec un taux comparable à celui observé avec $\gamma_k = 1$ ; dans le cas opposé, quand $\gamma_k$ décroît rapidement vers 0, *i.e.* pour $\gamma_k = e^{-|k|}$, l'amortissement est très faible et la décroissance de la norme $L^2$ est très lente, on doit intégrer longtemps pour l'observer. Cependant, dans les deux cas, l'accord avec la théorie est complet : quand $\gamma_k > 0$, $\lim_{t \to +\infty} |u|_{L^2} = 0$. Le taux de décroissance dépend de la convergence de $\gamma_k$ vers 0 quand $k$ tends vers $+\infty$. Pour ces raisons, on a choisi d'illustrer des situations intermédiaires, soit, amortissement polynomiale $\left(\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^\alpha}\right)$ (cf. Figure II.2) car elles permettent d'ajuster le taux d'amortissement.



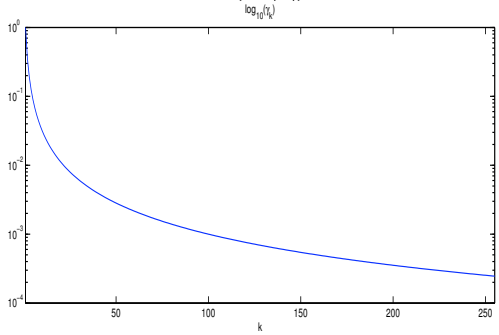

$\gamma_k = 1, \forall k$



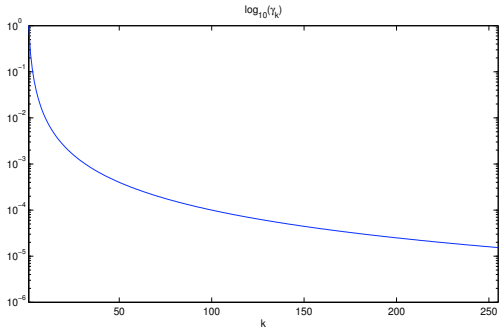

$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^{1/2}}$



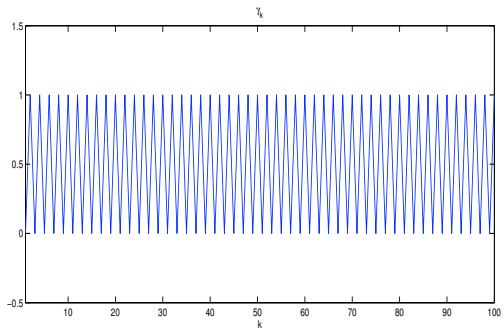

$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)}$




$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^{3/2}}$



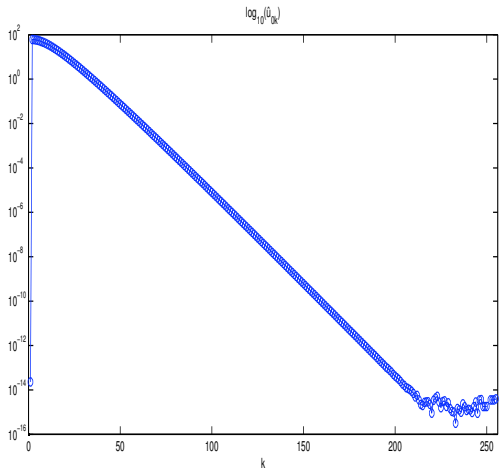

$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^2}$



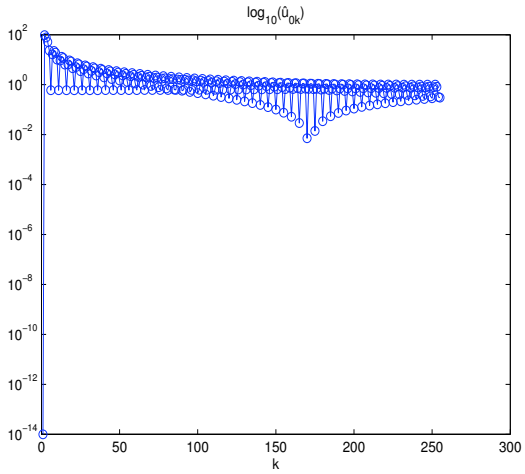

$\gamma_k = 1$ si $k$ est paire , 0 si $k$ est impaire

FIGURE II.2 – Différents profils d'amortissement en fréquence.

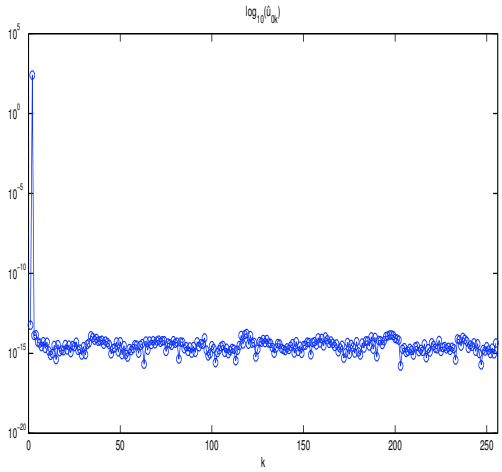
On obtient les résultats numériques en considérant les différentes données initiales suivantes (cf. Figure II.3) :
$u_0(x) = S1 = 3 \cdot c \cdot sech(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - p \cdot L))^2$, où $c = 1$, $p = 0.4$, est le soliton.
$u_0(x) = S2 = (0.4 \cdot L < x) \cdot (x < 0.6 \cdot L)$ correspond au créneau.
$u_0(x) = S3 = sin(2\pi x/L)$ est la donnée sinus.
$u_0(x) = S4 = 50\chi_{x>\pi} sin(4x)$ est la donnée initiale pour calculer les solutions périodiques. pour $L = 2\pi$ (inspiré de celle utilisé dans [CabRosa04])
Sauf indication contraire, pour toutes les simulations numériques, nous travaillons avec $L = 100$, $N = 2^9$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.



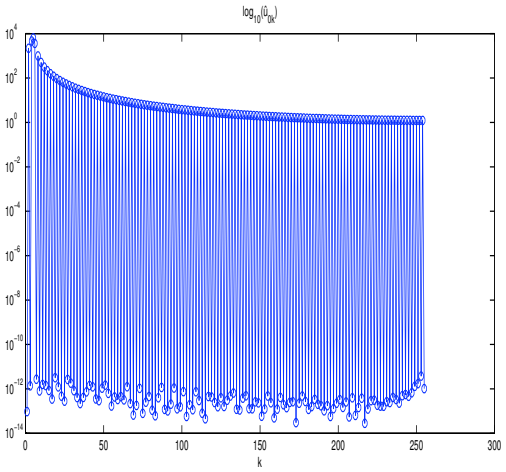

$u_0(x) = S1$




$u_0(x) = S2$




$u_0(x) = S3$




$u_0(x) = S4$

FIGURE II.3 – Energie spectrale de différentes données initiales.

Nous illustrons d'abord l'effet de l'amortissement pour différentes suites $\gamma_k$ sur les deux cas d'équation linéaire et non linéaire. Dans un premier temps, nous illustrons l'effet de l'amortissement dans les deux normes d'énergie $|.|_{L^2}$ et $|.|_\gamma$. Nous constatons en particulier que, comme prévu, quand $\gamma_k > 0$, la solution de l'équation homogène converge vers 0 dans

$L^2 \cap H_\gamma$. Cependant, quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$, le taux de convergence dépend de $u_0$ et de sa décomposition de Fourier.

### Précision des schémas

Dans les Figures II.4 et II.5, nous comparons la précision des différents schémas ; comme prévu Euler et *Sp* sont du premier ordre tans dis que les autres (C-N, Sanz-Serna et *SpSt*) sont du second ordre.

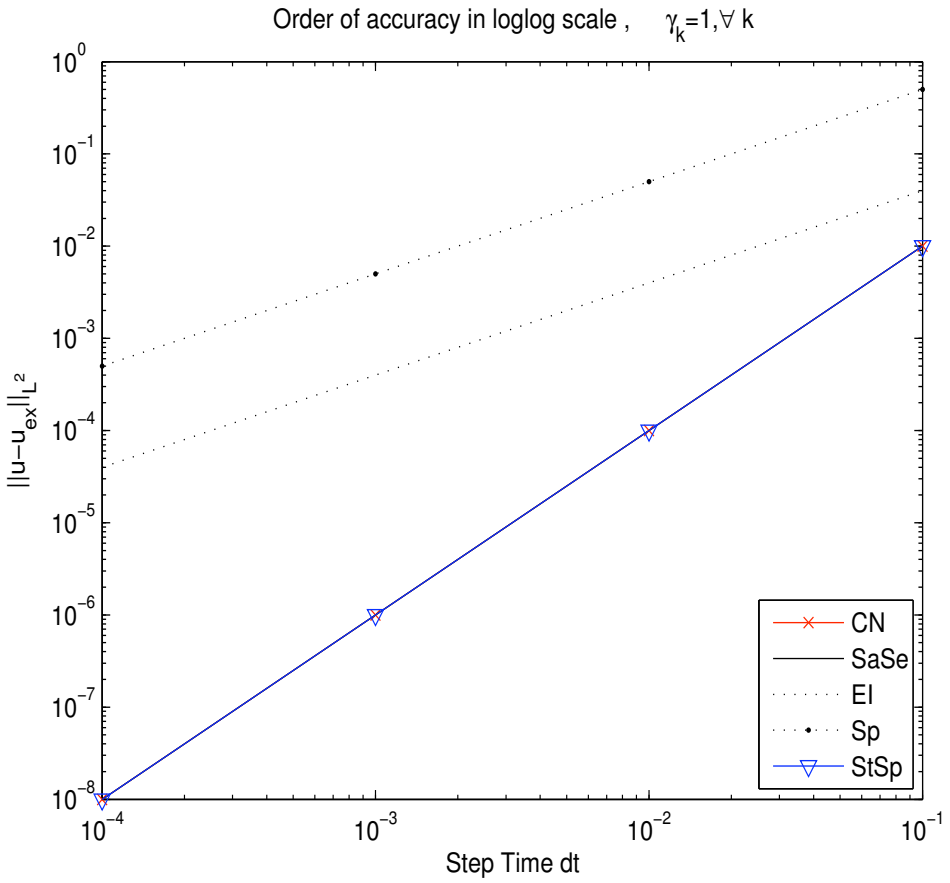



FIGURE II.4 – Comparaison de taux de précision des schémas pour $\gamma_k = 1, \forall k$.

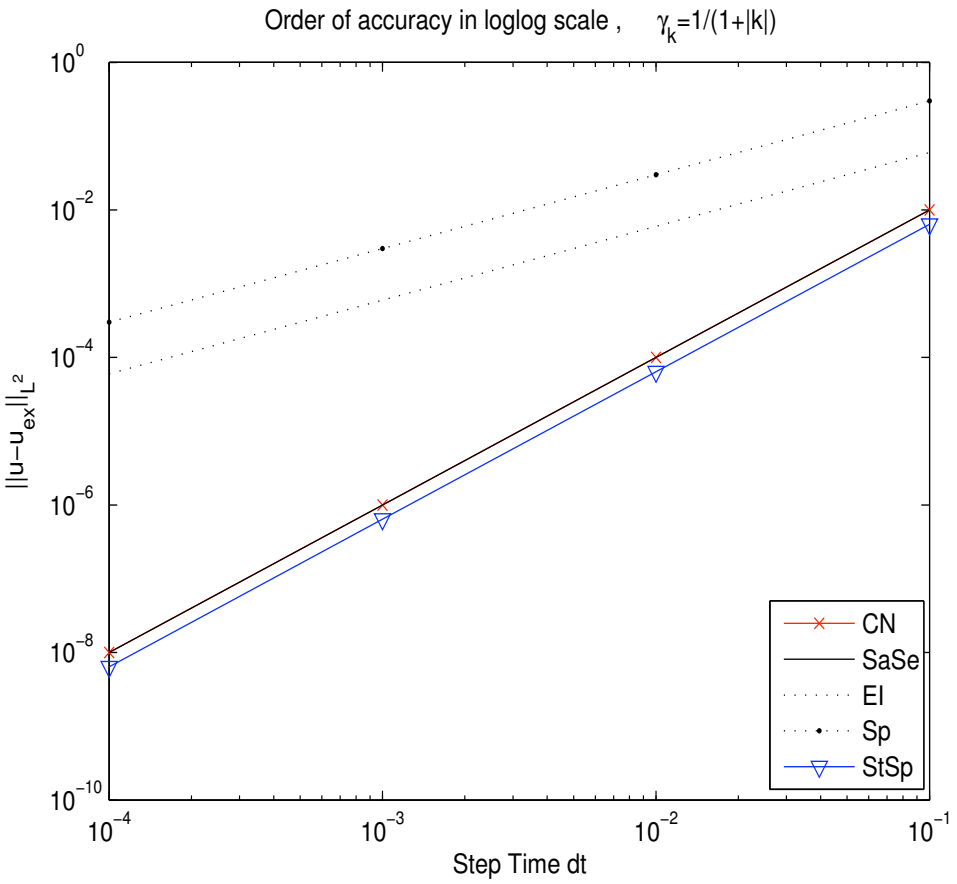



FIGURE II.5 – Comparaison de taux de précision des schémas pour $\gamma_k = \frac{1}{1+|k|}$.

Maintenant nous voulons illustrer la nécessité de supposer $\gamma_k > 0$ pour obtenir un amortissement en temps en norme $L^2$ et $H_\gamma$. Nous rappelons l'identité

$$\widehat{\partial_x u^2}_k = \hat{v}_k = \frac{2i\pi k}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{k-n}\hat{u}_n.$$

D'où, si $\hat{u}_{2p+1} = 0$, pour $p \in \mathbb{Z}$ alors $\hat{v}_{2k+1} = 0$. Par conséquent, il est facile de montrer que si $\hat{u}_0$ et $f$ ont seulement des fréquences paires non nulles, alors la suite générée par les différents schémas jouit de la même propriété. En conséquence, un peigne d'amortissement supporté par les fréquences paires va amortir toute la solution, tandis qu'un peigne d'amortissement supporté seulement par les fréquences impaires n'aura pas d'effet d'amortissement.
En effet soit $u \in L^2$ telle que $\hat{u}_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Nous posons $v = \partial_x u^2$. Nous avons

$$\hat{v}_k = \frac{2i\pi k}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{k-n}\hat{u}_n = \frac{2i\pi k}{L} \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{k-2n}\hat{u}_{2n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{k-2n-1}\hat{u}_{2n+1} \right).$$

Si $k = 2p + 1$, nous avons

$$\hat{v}_{2p+1} = \frac{2i\pi k}{L} \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{2p+1-2n}\hat{u}_{2n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{2p+1-2n-1}\hat{u}_{2n+1} \right) = 0.$$

Plus généralement, nous pouvons prouver le résultat suivant

**Lemme 26.** *Soit $u, v \in L^\infty(\mathbb{T})$. Supposons que $\hat{u}_{2k+1} = \hat{v}_{2k+1} = 0$. Alors*

$$\widehat{uv}_{2k+1} = 0, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Il suit par récurrence que si $\hat{u}_{2k+1} = 0$, alors $\hat{u}^p_{2k+1} = 0$.

Basé sur ces résultats, on construit deux exemples dans lesquels la solution peut être soit amortie de façon exponentielle soit non amortie par tout, par un choix pertinent de valeur initiale spectrale et des coefficients nuls $\gamma_k$.
Dans les Figures II.6 et II.7, on construit un contre-exemple montrant qu'il est nécessaire de prendre $\gamma_k > 0, \forall k$ pour avoir un amortissement de la norme $L^2$.

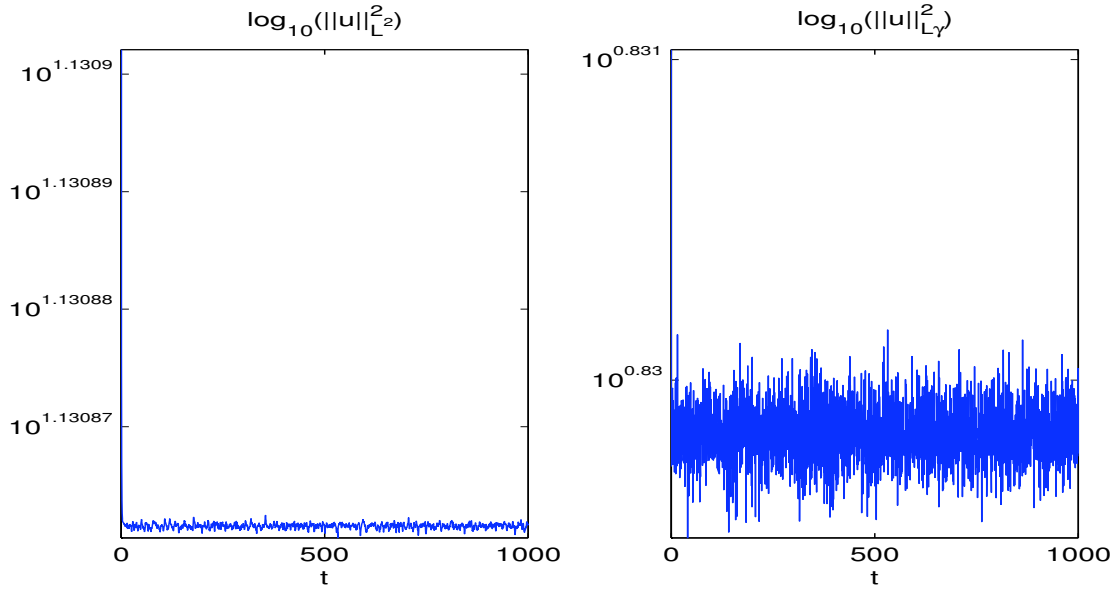



FIGURE II.6 – $f = 0$, $\widehat{u_0}_{2k+1} = 0$ et $\gamma_{2k} = 0, \gamma_{2k+1} = 1$.

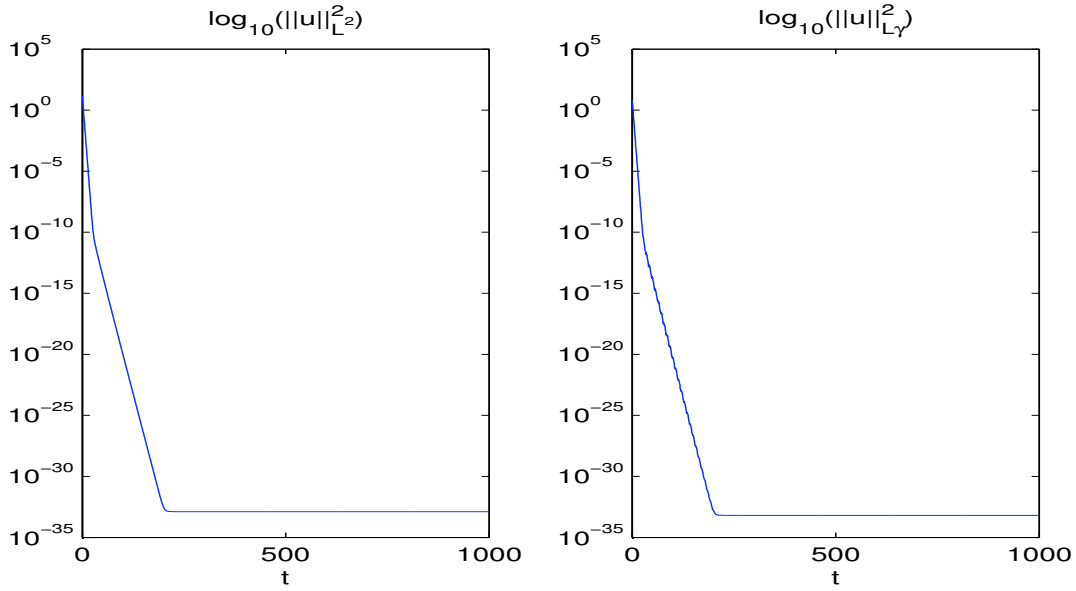



FIGURE II.7 – $f = 0$, $\widehat{u_0}_{2k+1} = 0$ et $\gamma_{2k+1} = 0, \gamma_{2k} = 1$.

### L'équation KdV homogène et amortie

Dans les Figures II.8 à II.13 on observe un accord parfait avec les résultats établis ci-dessus : quand $\gamma_k > 0, \forall k$ la solution converge vers 0 en normes $L^2$ et $H_\gamma$, cependant, quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$, le taux (pente en échelle log) dépend à la fois de la donnée initiale $u_0$ et de $\gamma_k$. Dans le cas d'une bande passante, *i.e.*, lorsque $\gamma_k = 0$ pour $N_1 \leq |k| \leq N_2$, nous observons la convergence vers 0 s'il y a suffisamment de fréquences qui sont amorties.

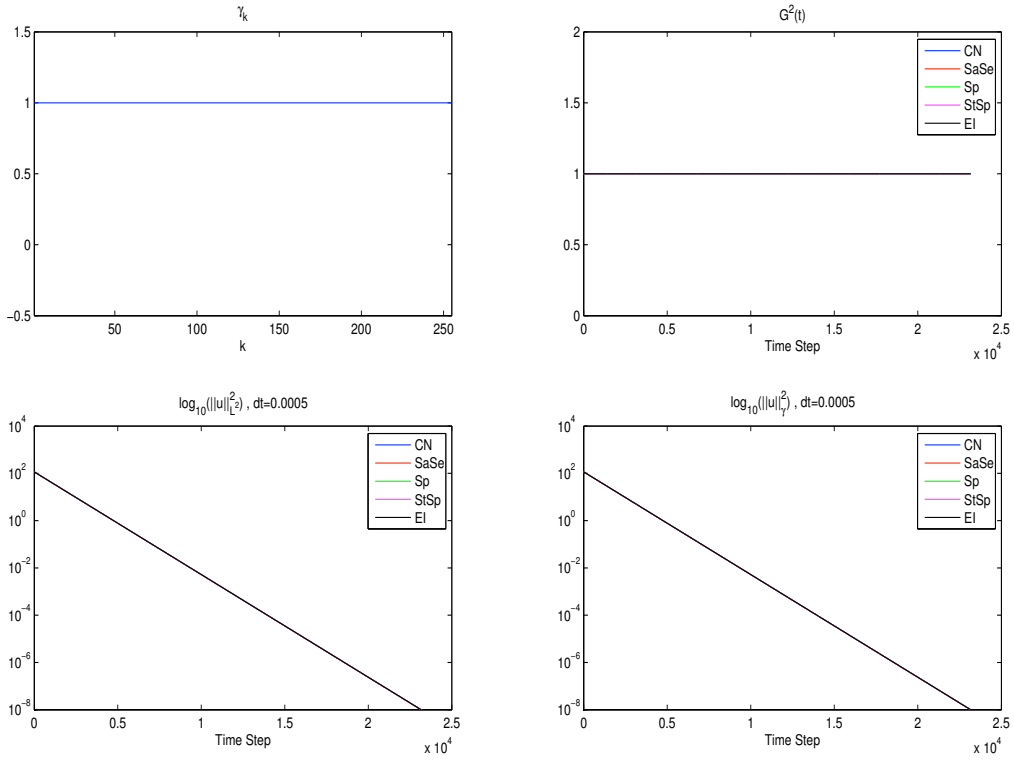



FIGURE II.8 – $u_0(x) = S1$, $\gamma_k = 1, \forall k,\ f(x) = 0$.

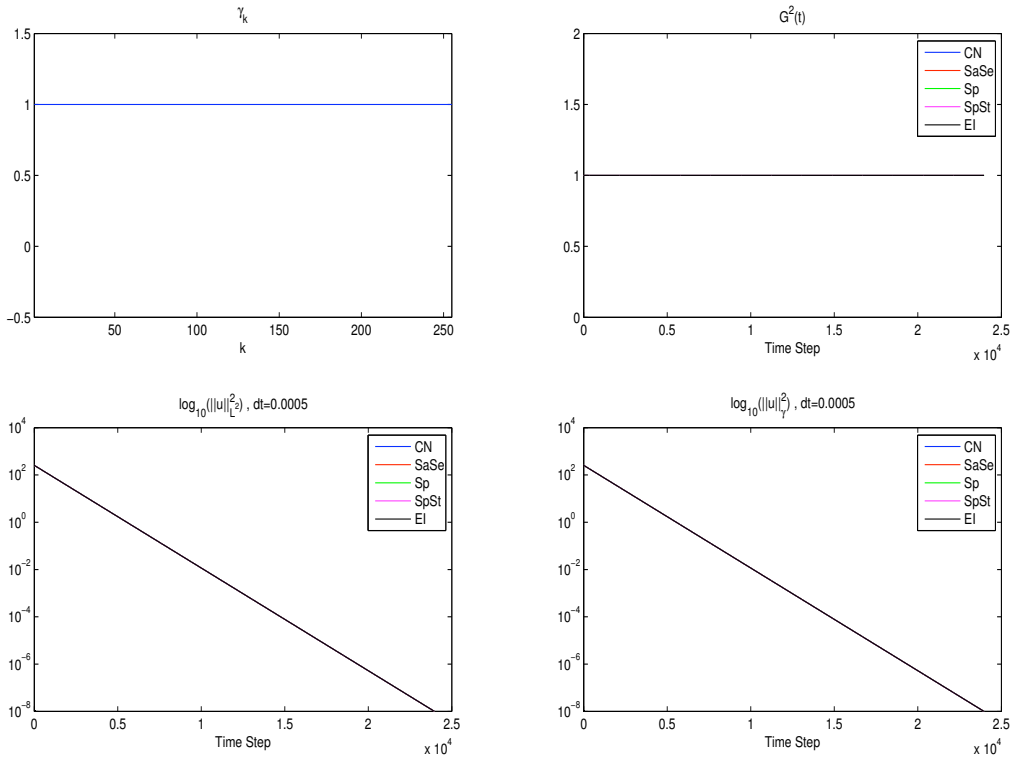



FIGURE II.9 – $u_0(x) = S3$, $\gamma_k = 1, \forall k,\ f(x) = 0$.

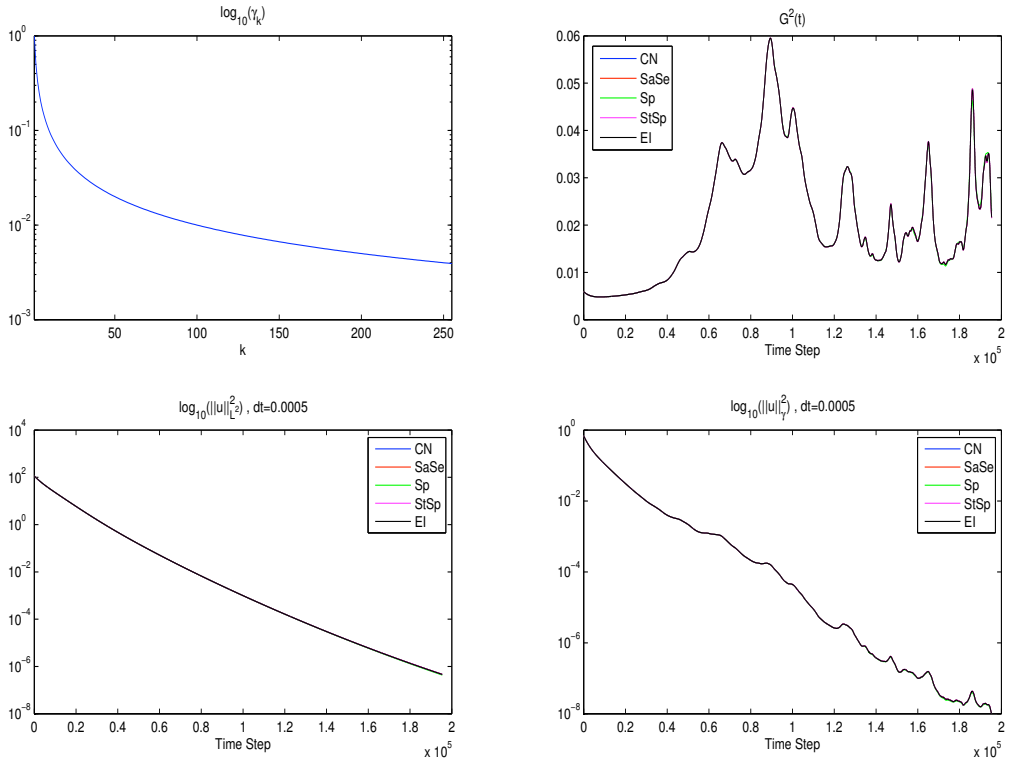



FIGURE II.10 – $u_0(x) = S1, \gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)}$, $f(x) = 0$.

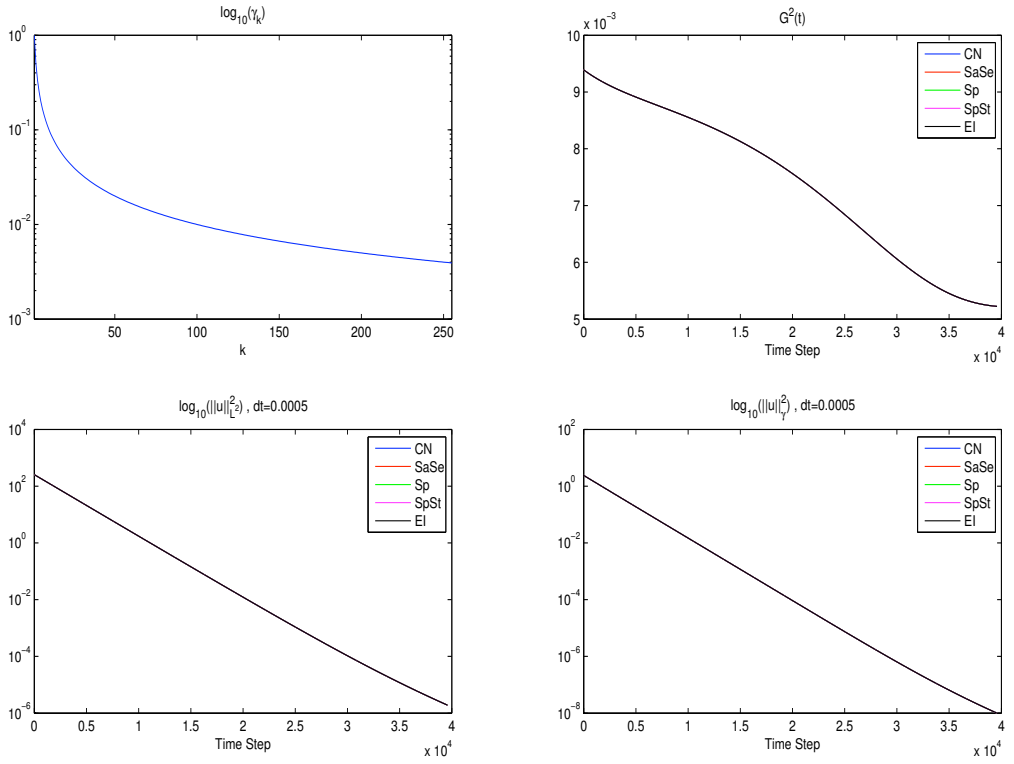



FIGURE II.11 – $u_0(x) = S3, \gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)}$, $f(x) = 0$.

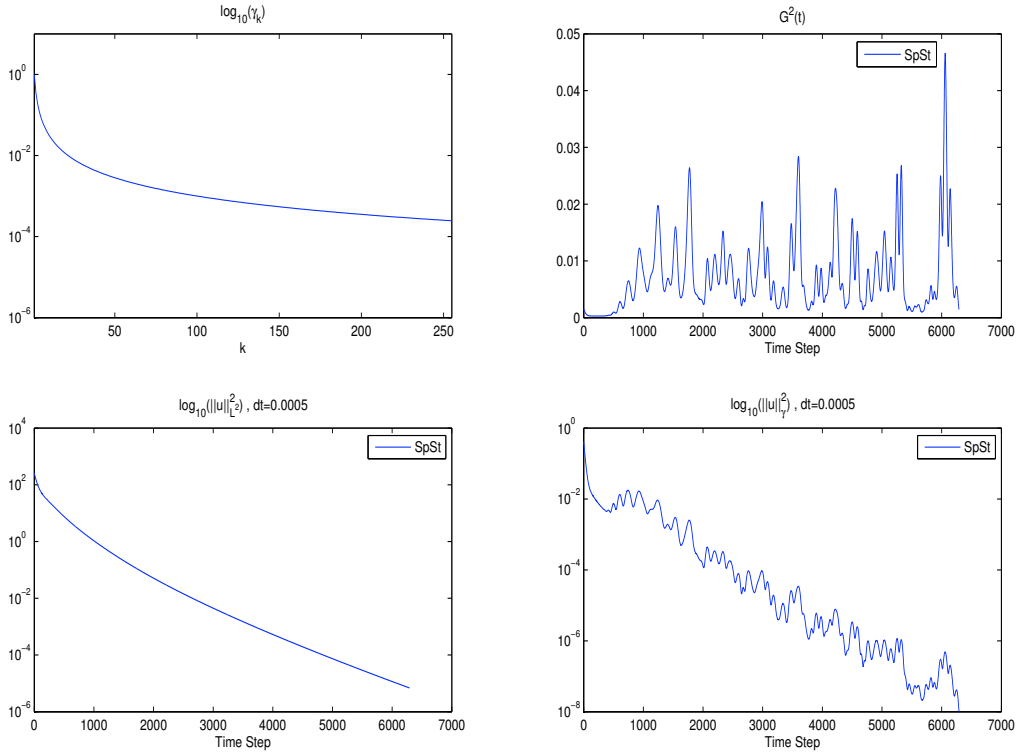



FIGURE II.12 – $u_0(x) = S1$ ,$\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^2}$, $f(x) = 0$.

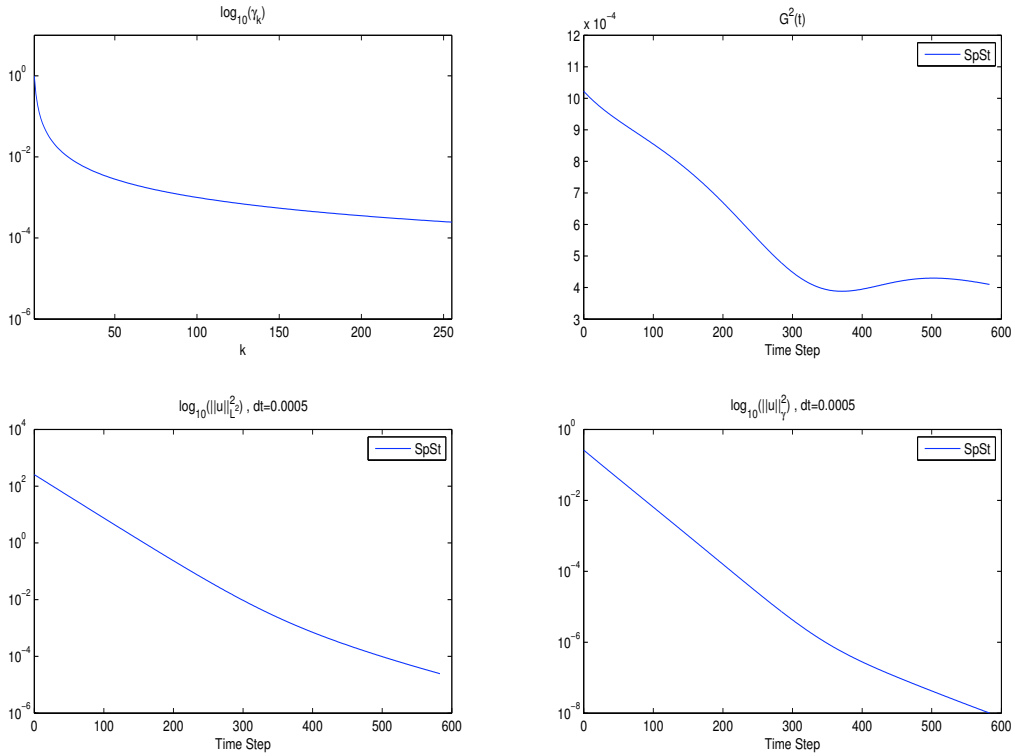



FIGURE II.13 – $u_0(x) = S3$ , $\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^2}$, $f(x) = 0$.

### II.1.5 KdV forcée

Nous considérons maintenant l'équation amortie et forcée. Nous portons un intérêt particulier au calcul des solutions spéciales comme les solutions stationnaires et les solutions périodiques. Ensuite nous donnons des preuves numériques des propriétés de régularisation en affichant l'évolution en temps de la régularité de Sobolev de la solution discrète.

#### Solutions stationnaires

Premièrement, notons qu'il est difficile d'obtenir des bornes sur $\gamma$ qui garantissent l'existence de solution stationnaire, comme proposé dans [CabRosa04] pour le cas $\gamma = cste$. En effet, supposons que l'équation possède une solution stationnaire $v$, nous posons $w = u - v$ et nous constatons que

$$w_t + \mathcal{L}_\gamma(w) + w_{xxx} + uu_x - vv_x = 0.$$

D'où, en prenant le produit scalaire dans $L^2$ avec $w$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|w|_2^2}{\mathrm{d}t} + |w|_\gamma^2 + \frac{1}{2}\int_0^L v_x w^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Quand $\gamma_k = cste$ ou $\gamma_k \geq c > 0$, l'équation est (au moins) faiblement amortie et Rosa et Cabral [CabRosa04] ont remarqué des dynamiques non triviales (plusieurs solutions stationnaires, solutions périodiques). Dans un tel cas,

$$|w|_\gamma^2 \geq c|w|_{L^2}^2,$$

d'où, s'il existe une constante $\kappa$ strictement positive telle que

$$c + \frac{v_x}{2} \geq \kappa > 0, p.p. \text{ dans } [0, L],$$

alors

$$|w|_{L^2} \leq e^{-\kappa t}|w_0|_{L^2}.$$

Ainsi $v$ est la seule solution stationnaire et elle est asymptotiquement stable.

Quand $\gamma_k$ converge vers 0, il n'est pas possible de procéder comme ci-dessus car $|.|_\gamma$ et $|.|$ ne sont pas des normes équivalentes. Toutefois, quand $f$ est constante, $u = \dfrac{f}{\gamma_0}$ est une solution stationnaire de l'équation et la seule solution stable à moyenne nulle est $u = 0$.

Les dynamiques non triviales des grands temps se produisent quand la solution stationnaire $u^*$ n'est pas unique. Une condition d'unicité est

$$|w|_\gamma^2 + \frac{1}{2}\int_0^L v_x w^2 \mathrm{d}x \geq 0.$$

Nous avons

$$\widehat{v_x w^2} = \widehat{v_x} * \widehat{w} * \widehat{w}.$$

Posons $\theta = v_x w^2$, nous obtenons

$$\int \theta \mathrm{d}x = \frac{L}{2}\widehat{\theta}_0,$$

ainsi

$$\widehat{\theta}_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{-2i\pi k}{L}\widehat{v}_{-k}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_{k-n}\widehat{w}_n\right).$$

Finalement la condition de décroissance se lit comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{w}_k|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\pi\widehat{v}_k\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_{-k-n}\widehat{w}_n\right) \geq 0.$$

Nous majorons le second terme en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous obtenons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{w}_k|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\pi\widehat{v}_k|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_n^2\right) \geq 0.$$

Notons que

$$|v_x| = |\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2ik\pi}{L}\hat{v}_k e^{\frac{2ik\pi x}{L}}| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2k\pi}{L}|\hat{v}_k|,$$

nous voyons que la condition de décroissance ne peut être satisfaite que lorsque $\gamma_k$ est assez grand, par exemple $\gamma_k > \bar{\gamma} > 0$, pour des $\bar{\gamma}$ adaptées ; ce qui interdit $\gamma_k \to 0$.
Ci-après, nous présentons dans la Figure II.14 les différentes solutions stationnaires obtenues pour différentes suites $\gamma_k$, en prenant $u_0 = S3$ comme donnée initiale et $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

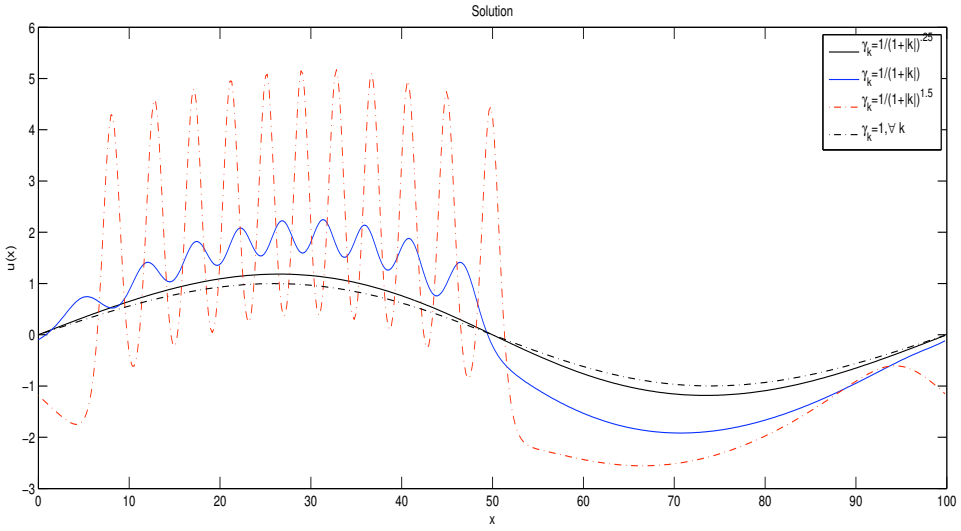



FIGURE II.14 – Solutions stationnaires trouvées avec différent $\gamma_k$, $u_0(x) = S3$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

Pour mesurer la convergence vers la solution stationnaire, nous affichons $\left\| \dfrac{du}{dt} \right\|^2_{L^2}$. Nous observons dans la Figure II.15, quand $\gamma_k = 1, \forall k$ et dans la Figure II.16 quand $\gamma_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^{.5}}$ que le taux de convergence vers la solution dépend de la donnée initiale.

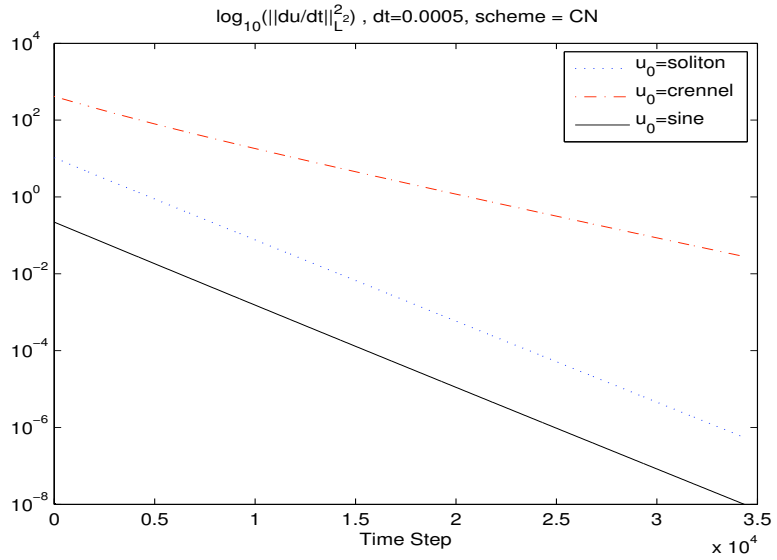



FIGURE II.15 – Evolution de $\|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2}$ pour $\gamma_k = 1, \forall k$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$, différentes $u_0(x)$.

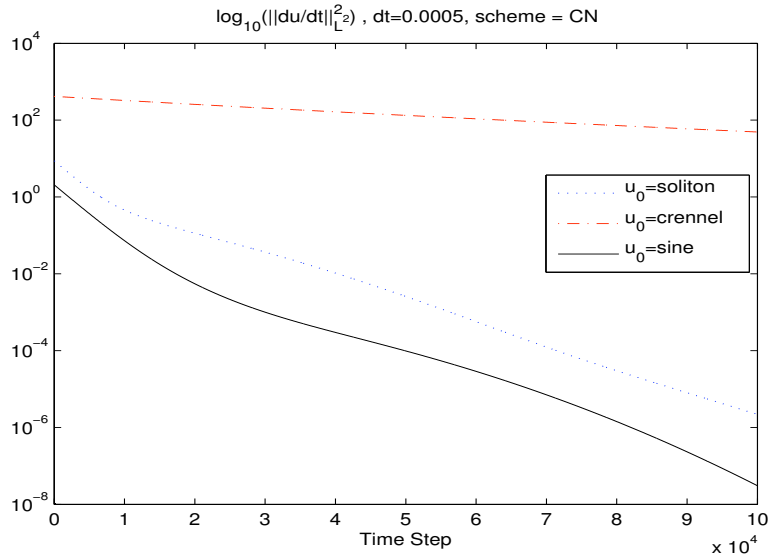



FIGURE II.16 – Evolution de $\|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2}$ pour $\gamma_k = \frac{1}{(1+|k|)^{.5}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$, différentes $u_0(x)$.

### Solutions périodiques en temps

Le calcul des solution périodiques en temps nécessite de commencer d'une donnée initial appropriée. On se restreint au cas $L = 2\pi$ et on choisit $u_0(x) = S4 = 50\chi_{x>\pi} sin(4x)$ : c'est la donnée initiale pour calculer les solution périodiques en temps et qui est inspirée par celle utilisé par Rosa et Cabral [CabRosa04]. Une façon d'observer numériquement la périodicité en temps est d'afficher les courbes de phase pour différentes paires de fréquences et de montrer des trajectoires fermées. Le nouveau résultat ici, reporté dans les Figures II.17 à II.20 est qu'on a encore des solutions périodiques en temps, même quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$ : ce résultat traduit une dynamique non triviale pour les grands temps.

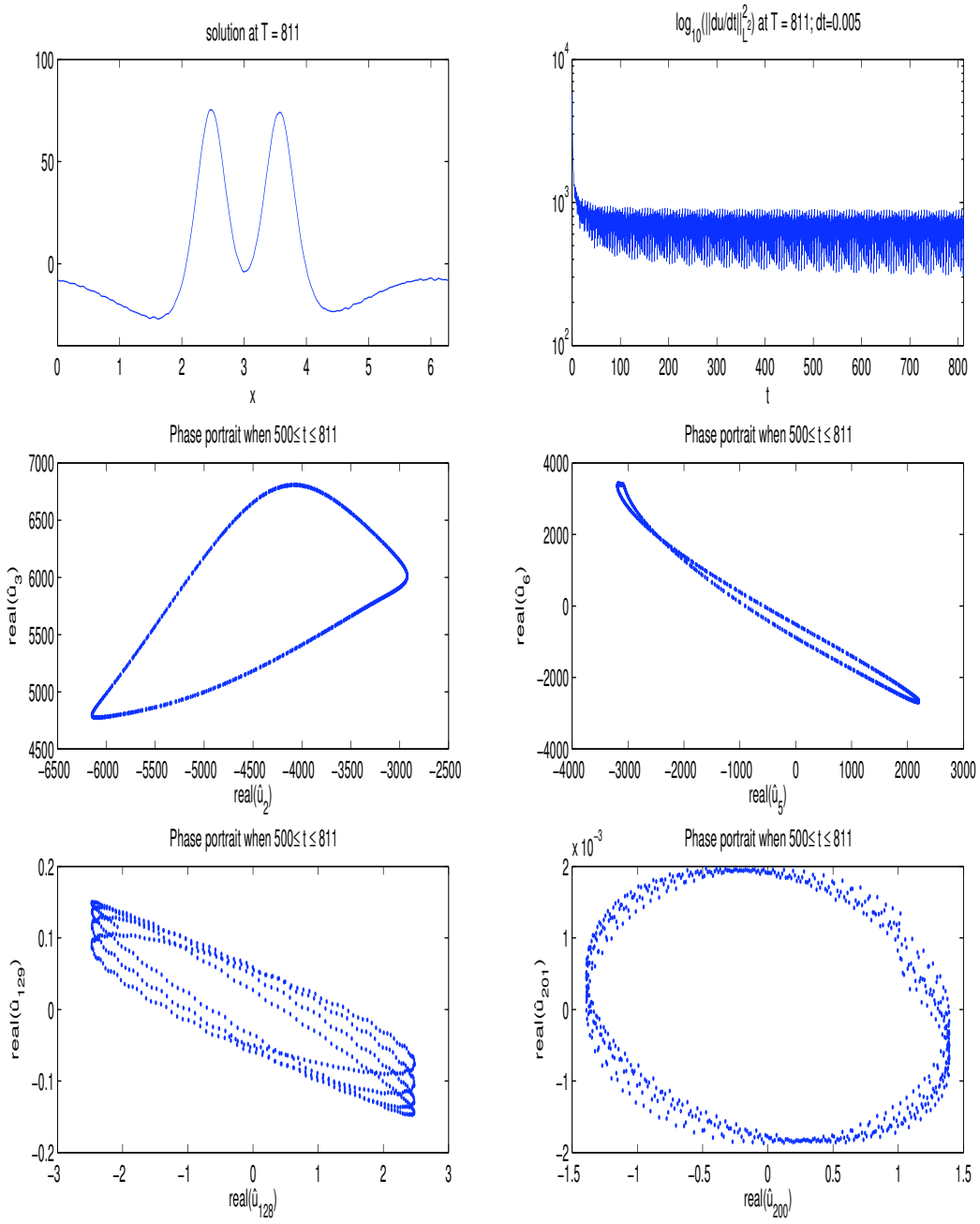



FIGURE II.17 – $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = 2.7, \forall k,\ f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

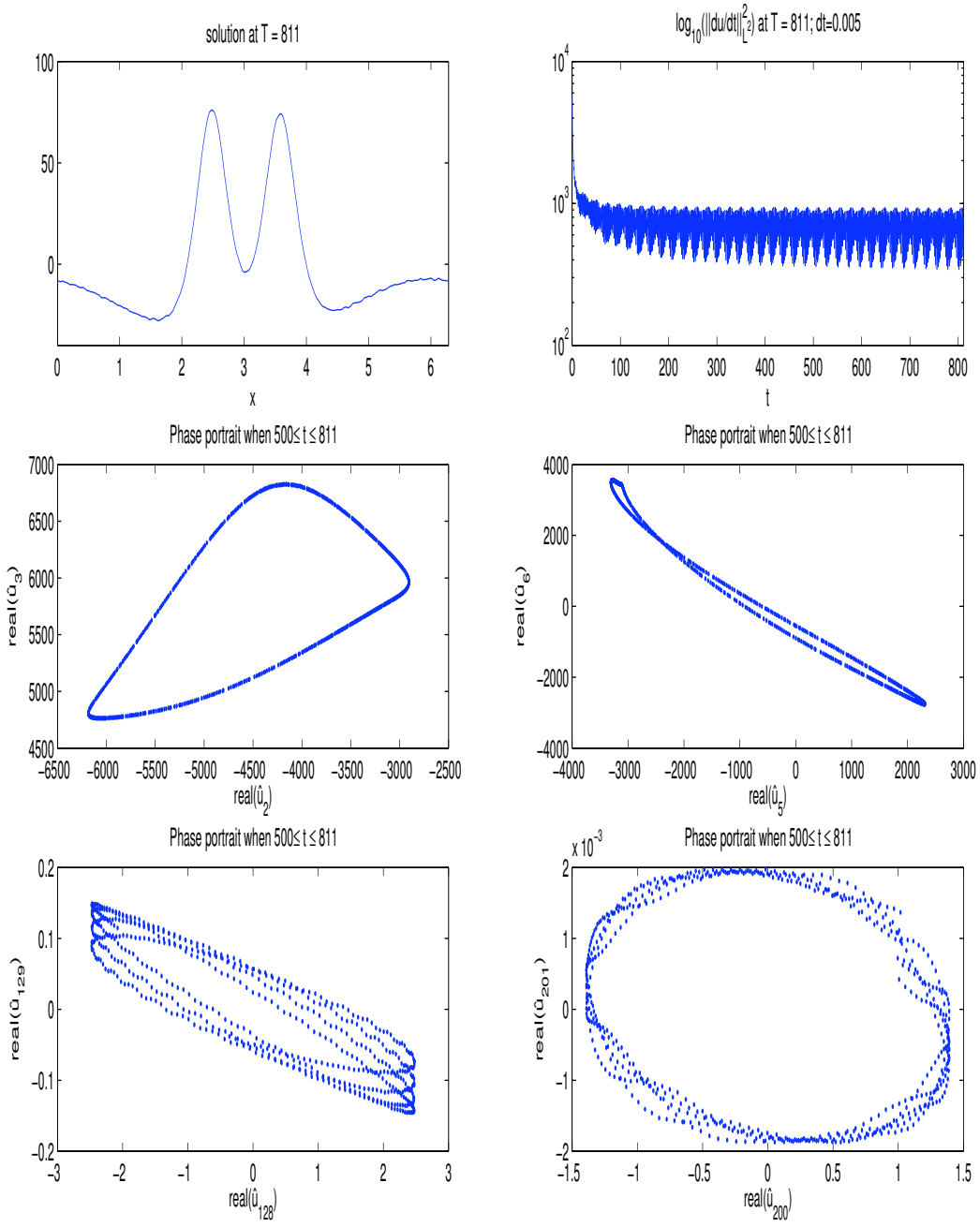



FIGURE II.18 – $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{3.8}{(1+|k|)^{0.3}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

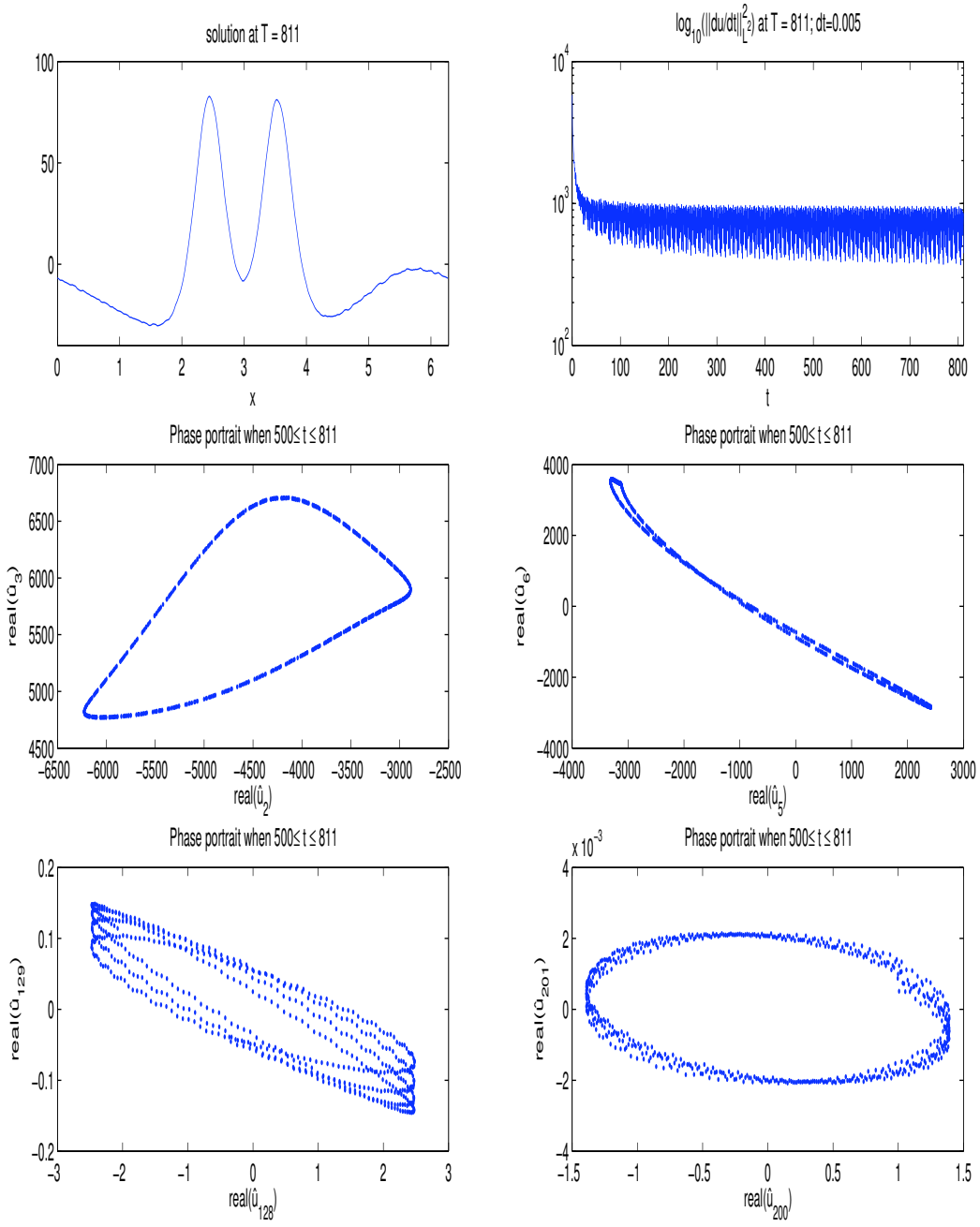



FIGURE II.19 – $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{4.8}{(1+|k|)^{0.5}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

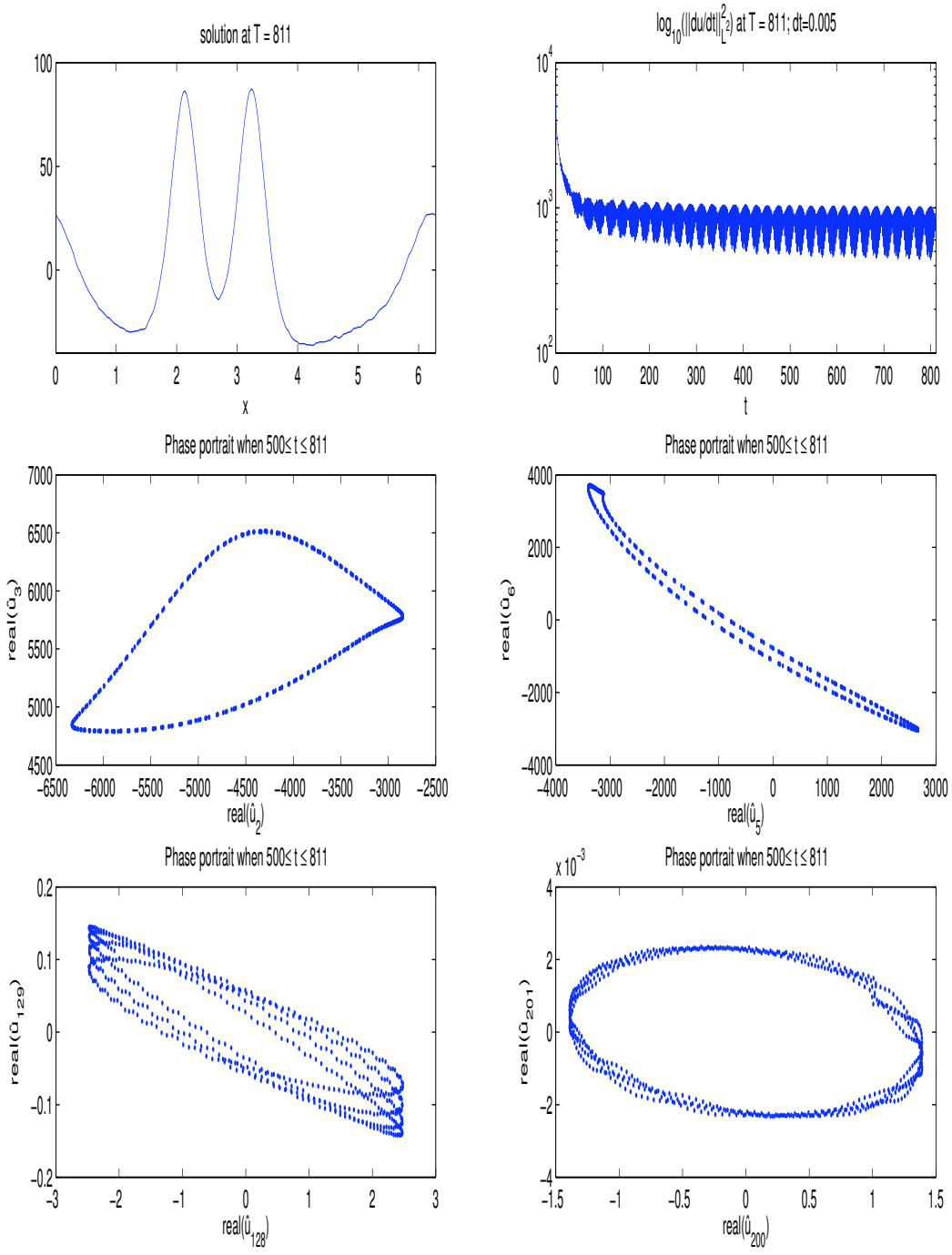



FIGURE II.20 – $u_0(x) = S4$ ,$\gamma_k = \dfrac{9.9}{(1+|k|)^{1.2}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

**Le comportement pour les grands temps : mesure de la régularité de Sobolev numérique**

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, l'un des objectifs ici est d'observer la régularisation asymptotique des solutions. Ceci a été réalisé dans le cas faiblement amorti ($\gamma_k = c$) [Gou00, GouRosa02], mais il reste à faire pour $\gamma_k \to 0$ . Dans cette optique, nous déterminons la régularisation discrète en analysant la convergence du développement de Fourier tronqué de la solution. Plus précisément si, pour un temps $t$ fixé, nous développons $u(x,.)$ comme

$$u(x,.) = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{u}_k w_k(x), \tag{II.35}$$

où $w_{2k}(x) = \sin(2k\pi x)$ , $k \geq 1$ , $w_{2k+1}(x) = \cos(2k\pi x)$ , $k \geq 0$.
La régularisation de la fonction $u(x)$ montre sur la corruption des modes à haute fréquence.Comme dans [AboAlmChehDumGou08], nous suivons [Mal98] en remarquant qu'une fonction $u$ qui est dans $L^2$ appartient à $H^s$, $s > 0$ si et seulement si

$$\sum_{N=1}^{+\infty} N^{2s-1} ||u - u_N||_{L^2}^2 < +\infty, \tag{II.36}$$

où

$$u_N = \sum_{|k|>N} \widehat{u}(k) e_k(x). \tag{II.37}$$

Bien sûr, dans la pratique, cette formule sera appliquée avec un nombre fini de modes de Fourier. Si nous utilisons deux niveaux d'approximations, le premier fin $u_N$ qui jouera le rôle de $u$ dans (II.36) et le deuxième grossier $u_{N/2}$ qui jouera le rôle de $u_N$ dans (II.36), nous avons à calculer $s$ tel que

$$\sum_{k=1}^{N/2} k^{2s-1} \left( \sum_{\ell=k}^{N} |\hat{u}_k|^2 \right) < +\infty.$$

L'exposant numérique de Sobolev est calculé en considérant la queue de spectre de l'énergie de la solution. Plus précisément, nous regardons à un comportement linéaire des coefficients de Fourier à hautes fréquences comme

$$\sum_{\ell=k}^{N} |\hat{u}_\ell|^2 \simeq \frac{C}{k^{2s}}, \text{ pour } k \gg 1,$$

ou de manière équivalente

$$v_k = \ln \sum_{\ell=k}^{N} |\hat{u}_\ell|^2 \simeq \ln(C) - 2s \ln k, \text{ pour } k \gg 1.$$

Il suffit alors de calculer $s$ par une régression linéaire (moindres carrés). Dans la pratique, nous allons sélectionner un petit nombre $(m)$ de $\hat{u}_k$. D'où $s$ (et $\kappa = \ln(C)$) sont calculer comme des minimiseurs de

$$\sum_{k=N-m}^{N} (v_k - (\kappa - 2s \ln(k))^2.$$

Dans les Figures II.21 à II.24, nous faisons remarquer des effets numériques régularisant même quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$ : la régularité de Sobolev augmente avec le temps.

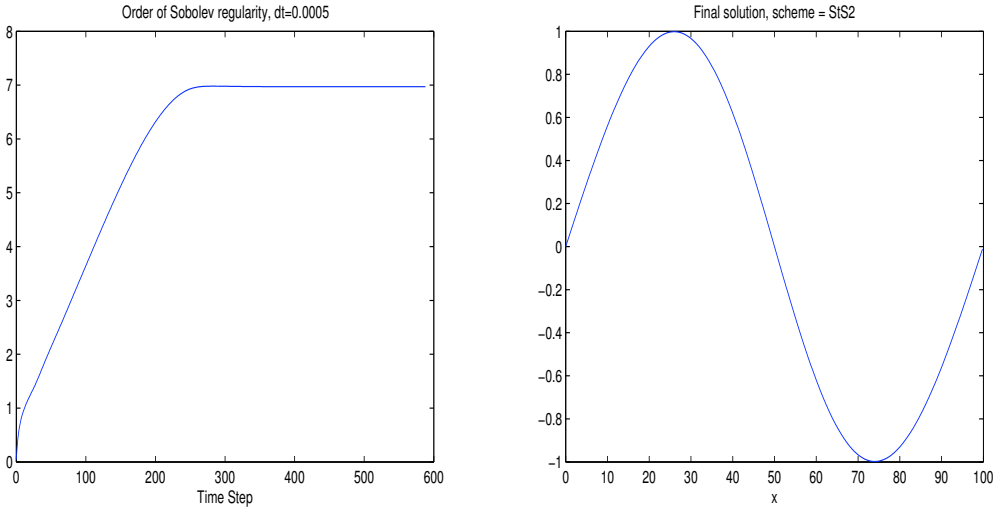



FIGURE II.21 – $\hat{u}_k(0) = \dfrac{1}{(1+|k|)}$ si $k$ est paire, 0 si $k$ est impaire, $\gamma_k = 1, \forall k, f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

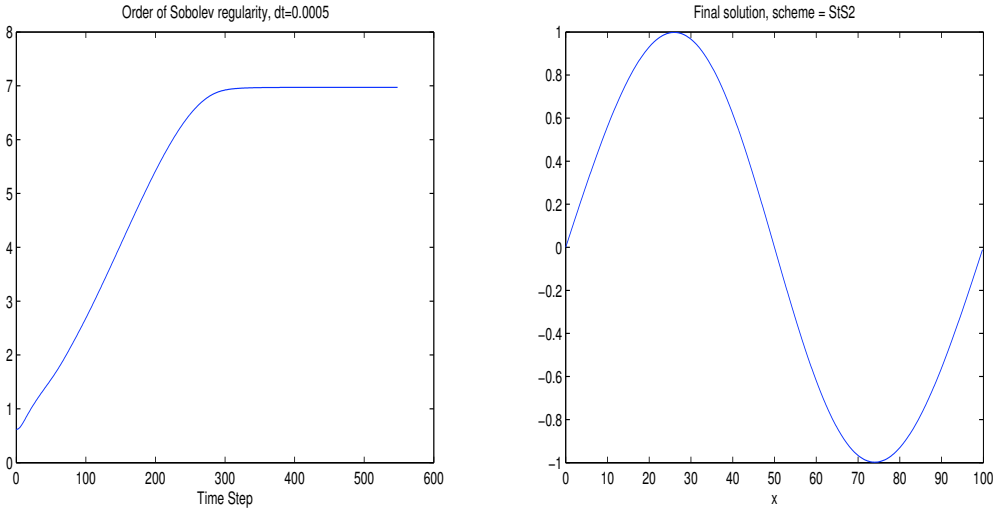



FIGURE II.22 – $u_0(x) = S2$ ,$\gamma_k = 1, \forall k$ $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

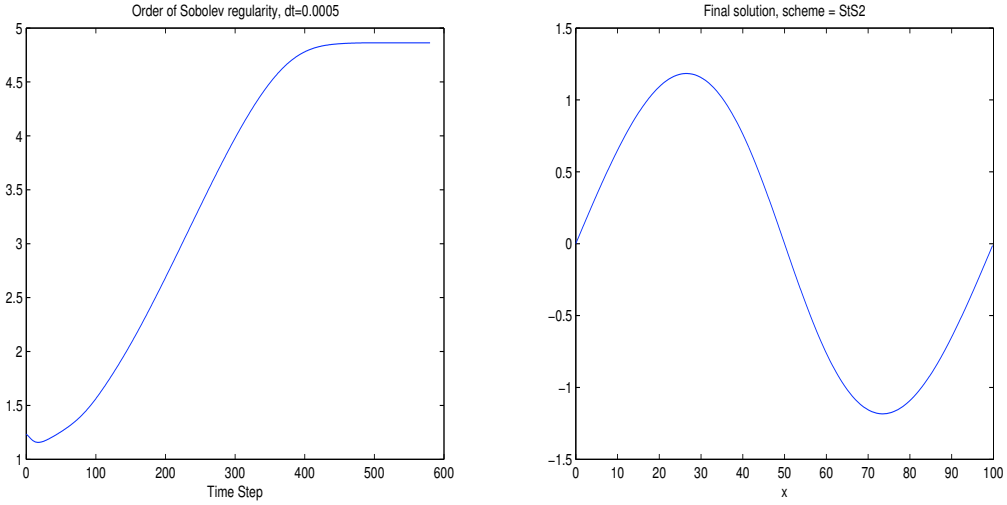



FIGURE II.23 – $u_0(x) = S1$ ,$\gamma_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^{1/4}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

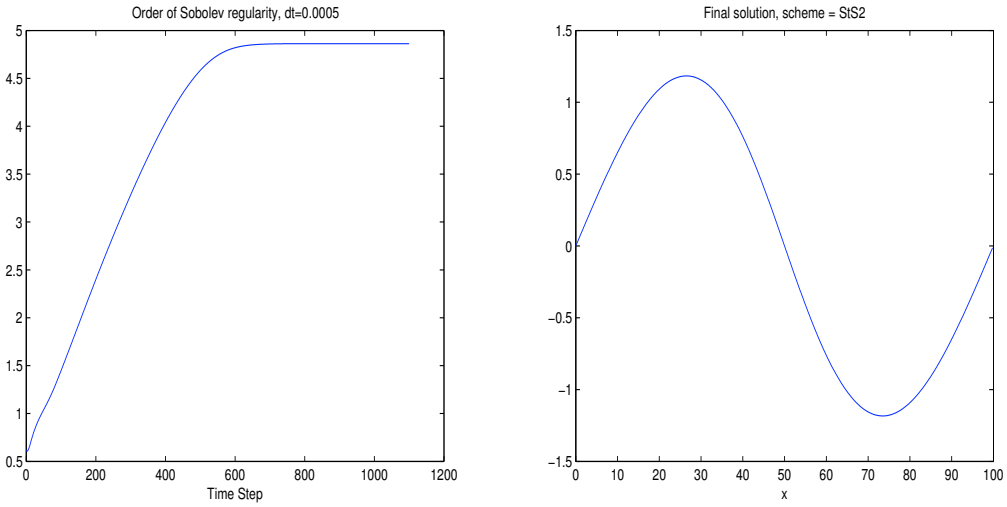



FIGURE II.24 – $u_0(x) = S2$ ,$\gamma_k = \dfrac{1}{(1+|k|)^{1/4}}$, $f(x) = \sin(2\pi x/L)$.

## II.2 Etude d'autres types d'amortissements

On considère dans cette section, d'une part un amortissement local dans l'espace physique qui s'interprète comme

$$\mathcal{L}u = \chi_{[a,b]}u$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de $[a,b] \subset [0,L]$ comme déjà étudiée dans la perspective de stabilisation des équations KdV,voir [LauRosiZha10, RosiZha09] ; d'autre part un amortissement non-local en temps pour les équations KdV : NLTKdV1, voir [ChenDumDupGou10]

$$a_0u_t + a_1u_x + a_2u_{xxx} + \sqrt{\nu}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u_t(s)}{\sqrt{t-s}}ds + a_3uu_x - a_4u_{xx} = 0,$$

où $a_i, i = 1,2,3,4$ et $\nu \in \mathbb{R}^+$.

### II.2.1 Amortissement local en espace

Nous donnons ci-après une première illustration. Nous considérons l'équation KdV amortie

$$u_t + u_{xxx} + \mathcal{L}(u) + uu_x = 0,$$

où l'amortissement (linéaire) est défini par

$$\mathcal{L}(u) = \chi_{[a,b]}u.$$

**Remarque 27.** *On peut remplacer $\chi_{[a,b]}$ par une fonction régulière à support compact dans $[a,b]$.*

#### Résultats mathématiques

Remarquons qu'il sagit bien d'un amortissement faible, dans le sens que le terme $< u, \mathcal{L}(u) >$ est contrôlé par $|u|^2_{L^2}$. Ceci a été étudié dans la perspective de stabilisation de l'équation de KdV, [LauRosiZha10, RosiZha09].

#### Discrétisation par différences finies

L'opérateur $\mathcal{L} = \chi_{[a,b]}$ agit localement en espace, c'est pourquoi il est naturel d'utiliser la méthode des différences finies pour la discrétisation spatiale. Nous serons amenés dans la suite à comparer l'effet sur les grands temps des différents amortissements ; pour pouvoir interpréter ces simulations de manière cohérente, nous aurons recours à des schémas très précis (les simulations pour $\mathcal{L}$ sont réalisées en Fourier-collocation). Pour atteindre un grand niveau de précision avec un schéma classique (explicite) aux différences finies, il est nécessaire de prendre en compte localement un grand nombre de points et les matrices sous-jacentes ont du coup une grande largeur de bande. Les schémas compacts permettent d'obtenir une précision comparable à celle du spectral tout en gardant une largeur de bande limitée [Lel92] . Ils consistent à approcher les valeurs aux points d'une grille de dérivées ou d'interpolées au moyen de schémas aux différences non plus explicites mais semi-implicites ; l'approximation de type polynomial est donc remplacée par une

approximation de type rationnelle. Plus prosaiquement, soit $U = (U_1, \cdots, U_n)^T$ un vecteur dont les composantes sont les approximations d'une fonction $u$ régulière aux points $x_i = ih$ de la grille, $i = 1, \cdots, n$, supposés régulièrement espacés. Le schéma classique explicite consiste à calculer $\mathcal{T}u = f$ au points $x_i$ par le produit matrice vecteur

$$F = TU$$

où $T$ est la matrice de discrétisation de $\mathcal{T}$, un opérateur de dérivation ou d'interpolation. La relation $f(x_i) = (TU)_i$ est alors satisfaite à un certain ordre de précision. Les schémas compacts consistent à approcher $\mathcal{T}u$ sous la forme

$$PF = QU$$

de sorte que la relation $f(x_i) = (P^{-1}QU)_i$ soit satisfaite à un ordre aussi élevé que possible. La matrice $P$ représente la partie implicite du schéma tandis que la matrice $Q$ représente la partie explicite. On reprend ici les schémas proposés dans Lele [Lel92]. Pour approcher $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_i)$ on considère l'ensemble de relations

$$u'(x_i) + \alpha(u'(x_{i+1}) + u'(x_{i-1})) + \beta\,(u'(x_{i+2}) + u'(x_{i-2})) =$$

$$a\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + b\frac{u(x_{i+2}) - u(x_{i-2})}{4h} + c\frac{u(x_{i+3}) - u(x_{i-3})}{8h}. \qquad \text{(II.38)}$$

Ici $h$ est le pas de discrétisation en espace. Les coefficients $\alpha, \beta$ $a, b$ et $c$ sont calculés de sorte à ce que (II.38) soit satisfait à un ordre prescrit en $h$.

- Ordre 10 (erreur en $h^{10}$) : $c = 1/75, \beta = 1/20, b = 101/150, \alpha = 1/2, a = 17/12$.
- Ordre 8 (erreur en $h^8$) : $\beta = 1/36, b = 25/54, \alpha = 4/9, a = 40/27, c = 0$.
- Ordre 6 (erreur en $h^6$) : $b = 1/9, \alpha = 1/3, a = 14/9, c = 0, \beta = 0$.
- Ordre 4 (erreur en $h^4$) : $b = c = \beta = 0, \alpha = 1/4, a = 3/2$.
- Ordre 2 (erreur en $h^2$) :$a = 1, b = c = \alpha = \beta = 0$.

On utilise les conditions aux limites périodiques pour fermer le système. De la même façon, la famille de schémas pour la dérivée troisième est

$$u^{(3)}(x_i) + \alpha(u^{(3)}(x_{i+1}) + u^{(3)}(x_{i-1})) + \beta(u^{(3)}(x_{i+2}) + u^{(3)}(x_{i-2})) =$$

$$a\frac{-2\cdot u(x_{i+1}) + 2\cdot u(x_{i-1}) + u(x_{i+2}) - u(x_{i-2})}{2h^3}$$

$$+b\frac{-2\cdot u(x_{i+2}) + 2\cdot u(x_{i-2}) + u(x_{i+4}) - u(x_{i-4})}{16h^3}$$

$$+ c\frac{-2\cdot u(x_{i+3}) + 2\cdot u(x_{i-3}) + u(x_{i+6}) - u(x_{i-6})}{54h^3}. \qquad \text{(II.39)}$$

- Ordre 6 (erreur en $h^6$) : $b = 1/9, \alpha = 1/3, a = 14/9, c = 0, \beta = 0$.
- Ordre 4 (erreur en $h^4$) : $b = c = \beta = 0, \alpha = 1/4, a = 3/2$.
- Ordre 2 (erreur en $h^2$) :$a = 1, b = c = \alpha = \beta = 0$.

### Résultats numériques

Nous retrouvons dans les Figures II.25 à II.36, le comportement d'amortissement à vitesse uniforme après un temps transitoire, tel que prévu dans [LauRosiZha10, RosiZha09] ; nous avons en particulier validé nos programmes en comparant les résultats obtenus avec divers ordres de discrétisation.

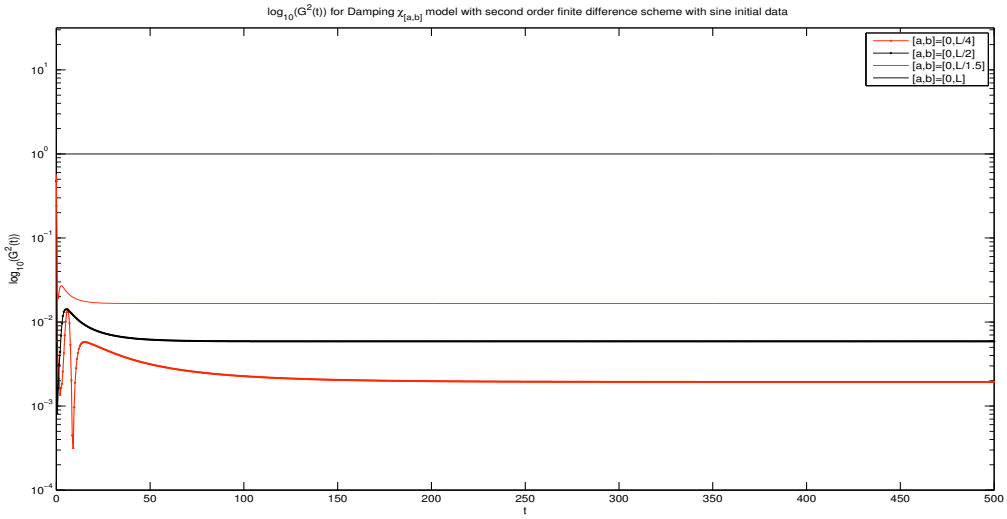



FIGURE II.25 – $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies.

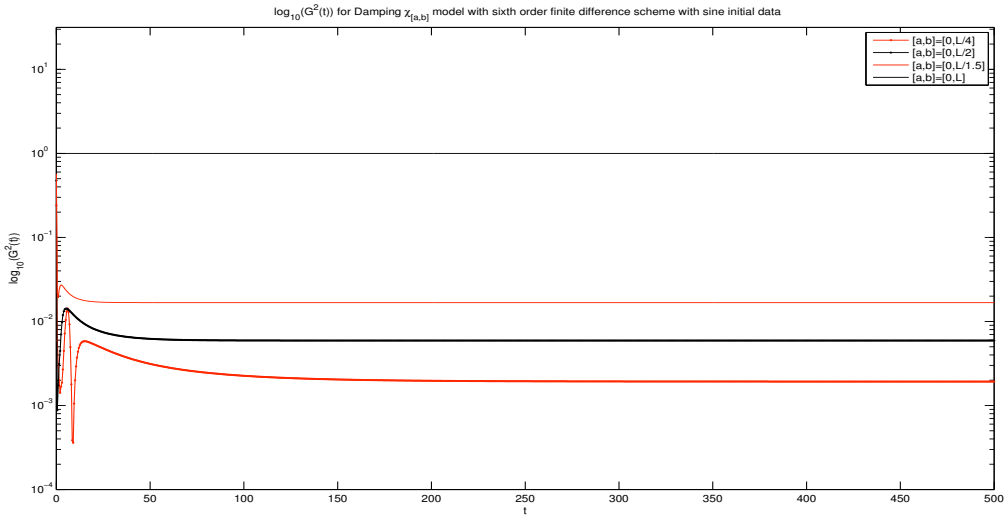



FIGURE II.26 – $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies.

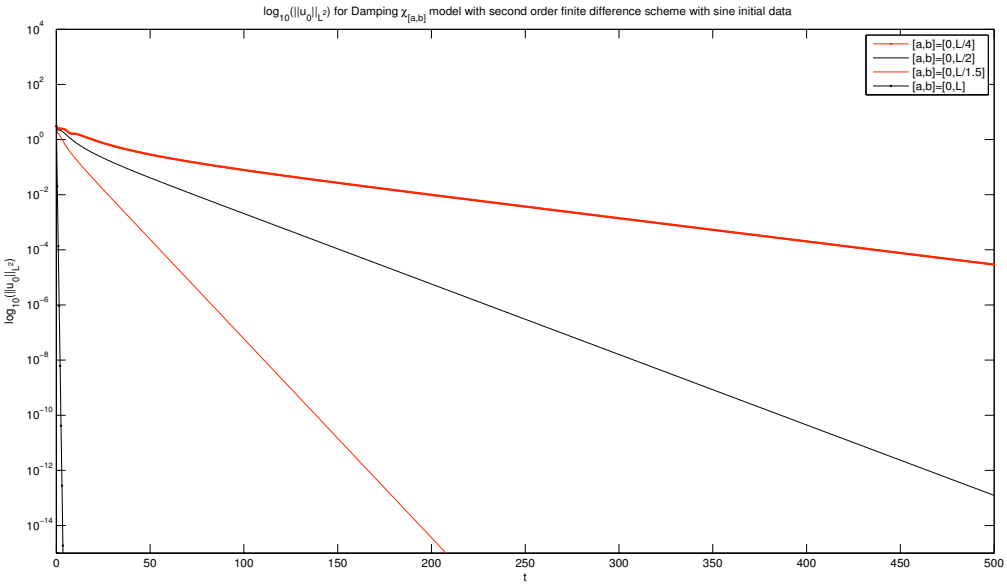



FIGURE II.27 – Norme $L^2$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies.

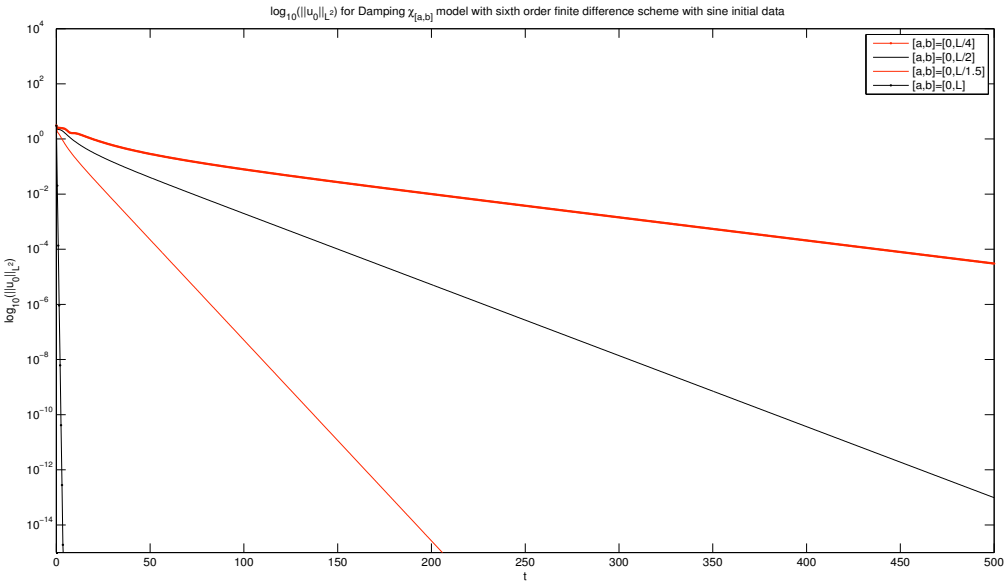



FIGURE II.28 – Norme $L^2$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies.

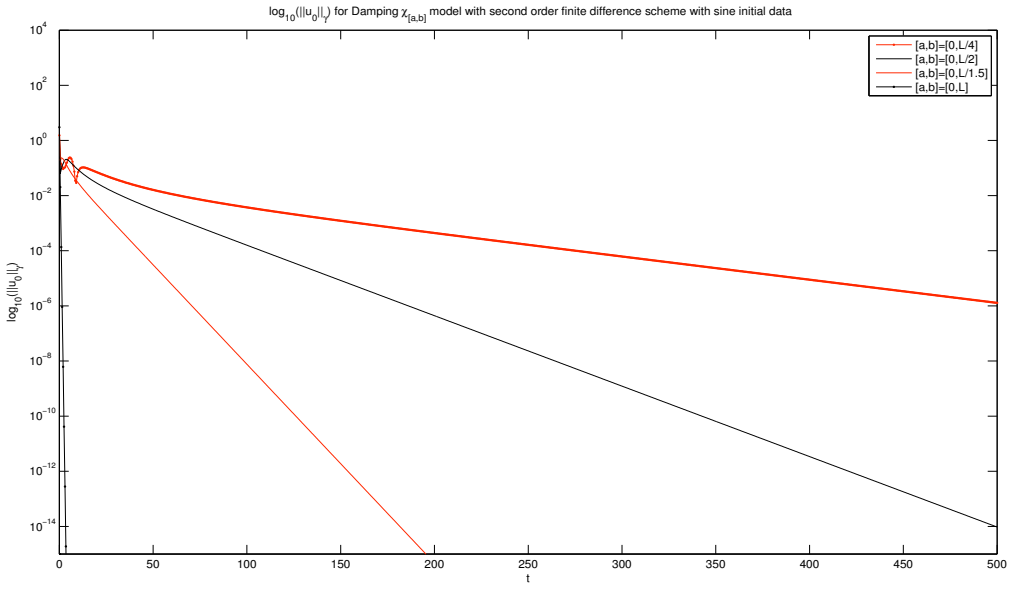



FIGURE II.29 – Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de second ordre de différences finies.

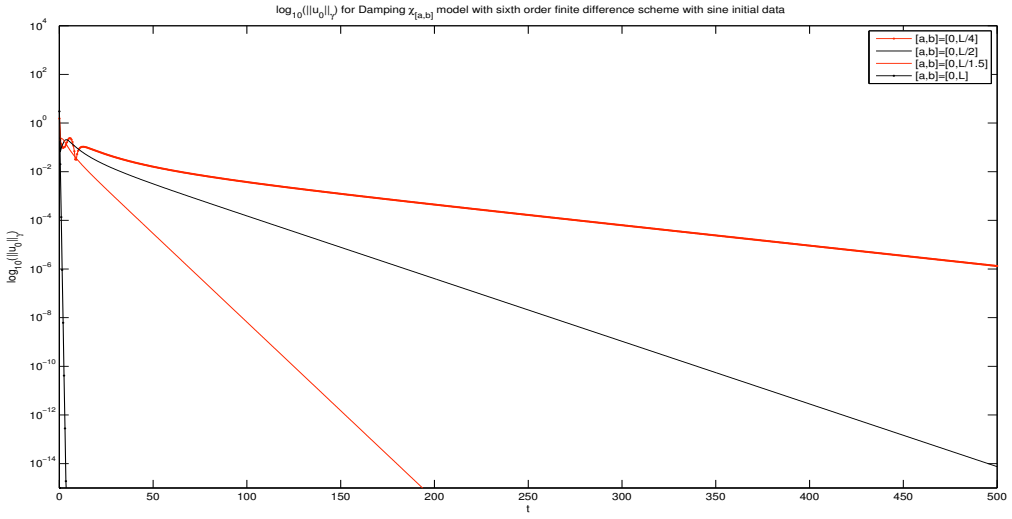



FIGURE II.30 – Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[a,b]}$ avec un schéma de sixième ordre de différences finies.

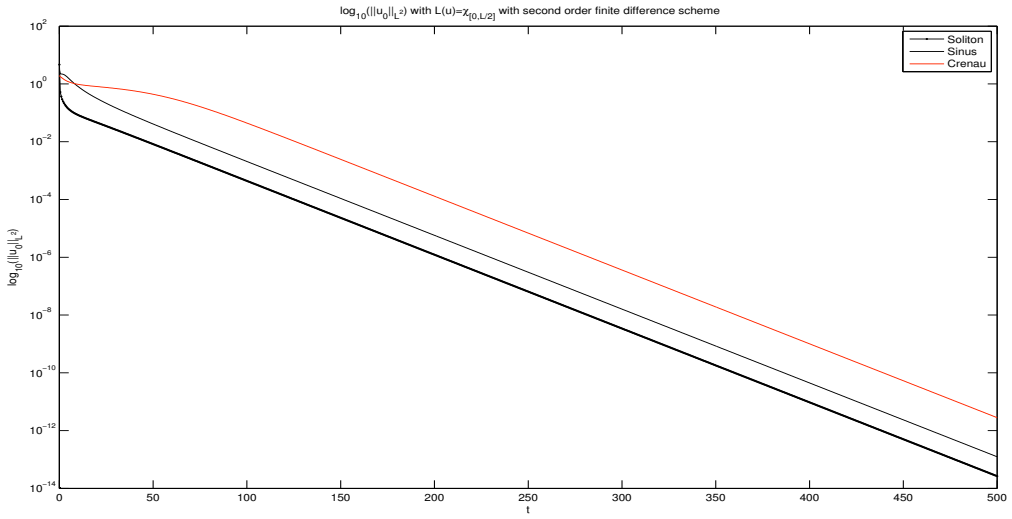



FIGURE II.31 – Norme $|u|_{L^2}$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5{\cdot}L < x){\cdot}(x < 0.7{\cdot}L)$ et $S3$.

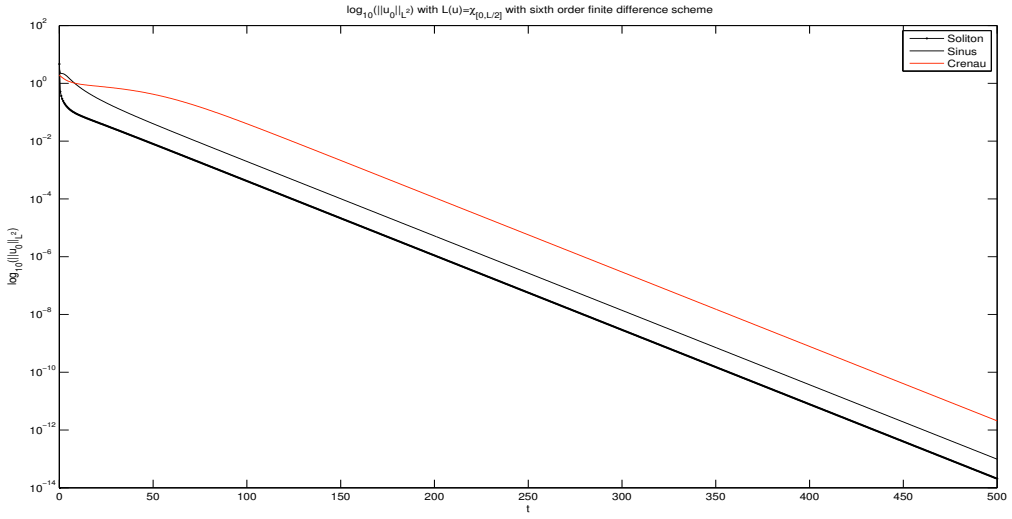



FIGURE II.32 – Norme $|u|_{L^2}$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$.

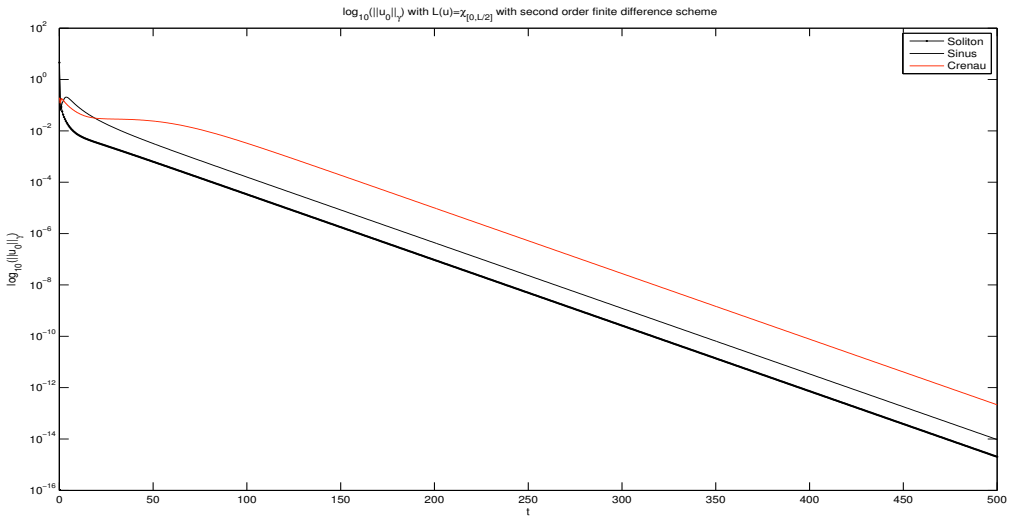



FIGURE II.33 – Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5{\cdot}L < x){\cdot}(x < 0.7{\cdot}L)$ et $S3$.

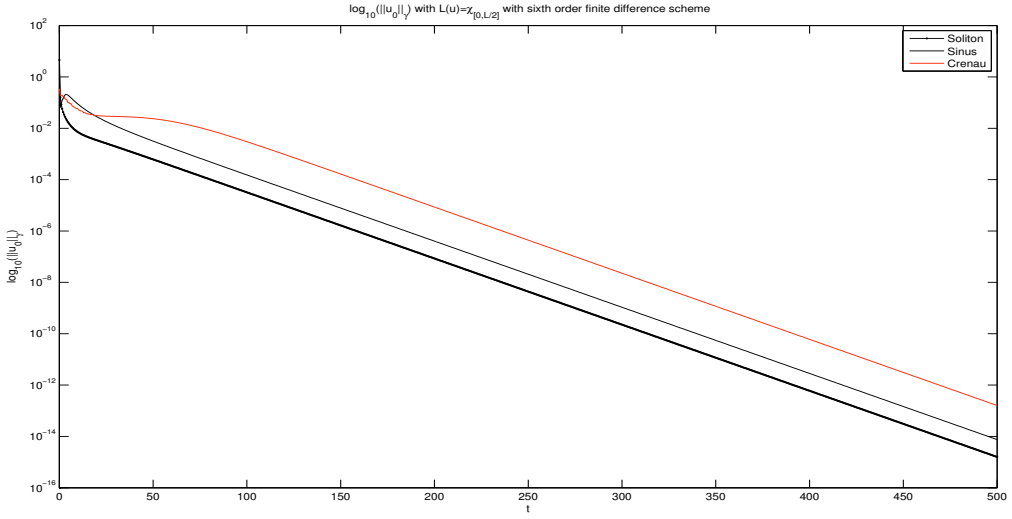



FIGURE II.34 – Norme $|u|_\gamma$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$.

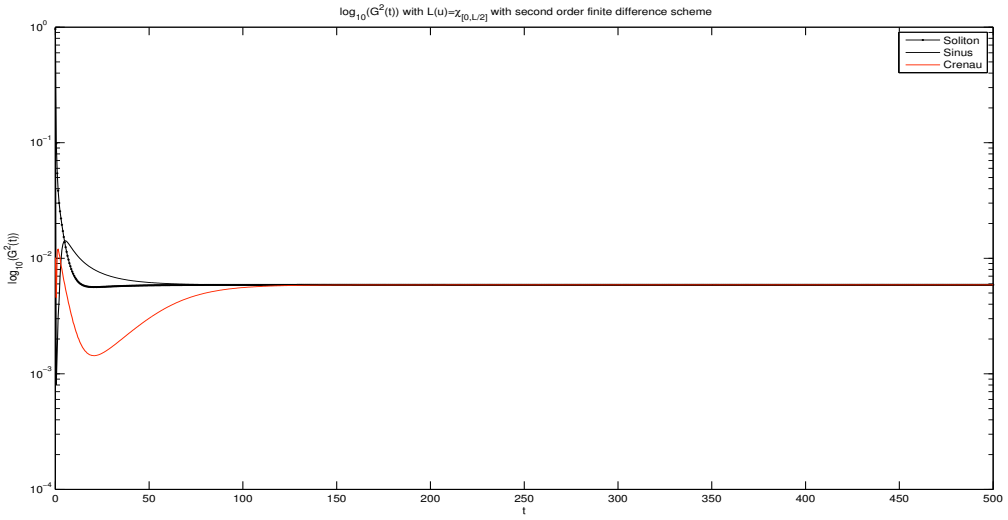



FIGURE II.35 – $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du second ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$.

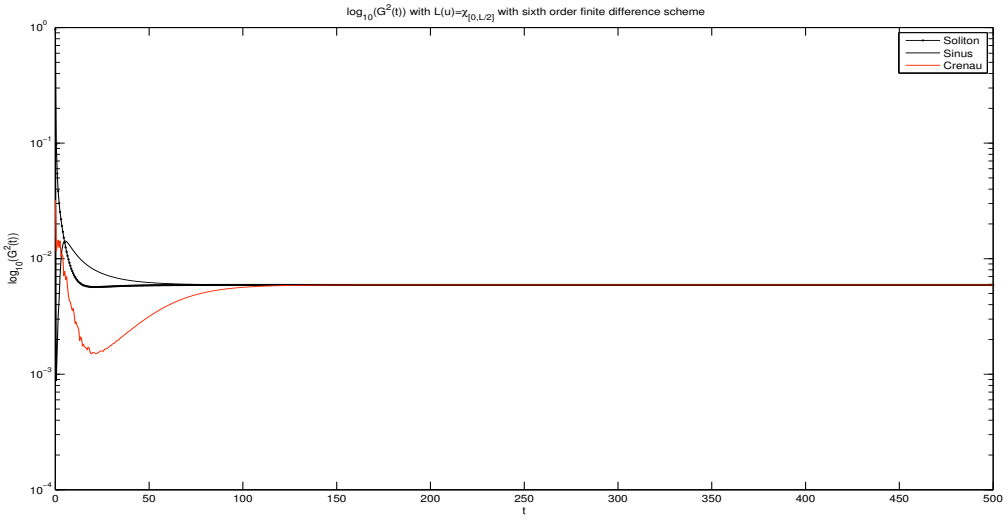



FIGURE II.36 – $G^2(t)$ pour le modèle d'amortissement $\chi_{[0,L/2]}$ avec un schéma du sixième ordre de différences finies pour trois données initale $S1$, $S2 = (0.5 \cdot L < x) \cdot (x < 0.7 \cdot L)$ et $S3$.

## II.2.2 Amortissement non-local en temps

### Schémas numériques

Les discrétisations en temps et en espace de ces équations sont présentées ci-dessous.

### Le problème NLTKDV

Nous décrivons ici la discrétisation en temps et en espace du problème

$$a_0 u_t + a_1 u_x + a_2 u_{xxx} + \sqrt{\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_t(s)}{\sqrt{t-s}} ds + a_3 u u_x - a_4 u_{xx} = 0.$$

Nous posons $G_t^{1/2} u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{u_t(s)}{\sqrt{t-s}} ds$.

**Discrétisation en espace**

Selon Dubois [DubGalPoi10], $(G_t^{1/2} u)^n = \sqrt{\dfrac{3}{2\Delta t}} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} g_{j+1} u^{n-j} = \sqrt{\dfrac{3}{2\Delta t}} \cdot \sum_{j=0}^{n} g_{n+1-j} u^j$ où $g_j$ sont les coefficients de Gear calculés dans [Dub01].
En prenant la série de Fourier de chaque terme nous avons

$$a_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \widehat{u}_k + \sqrt{\nu} \cdot G_t^{1/2} \widehat{u}_k + \underbrace{\left[ a_1 \cdot i \cdot \left( \frac{2\pi k}{L} \right) - a_2 \cdot i \cdot \left( \frac{2\pi k}{L} \right)^3 + a_4 \cdot \left( \frac{2\pi k}{L} \right)^2 \right]}_{\mathrm{TL}} \cdot \widehat{u}_k$$

$$+ \underbrace{a_3 \cdot i \cdot \left( \frac{2\pi k}{L} \right)}_{\mathrm{TNL}} \cdot \frac{\widehat{u^2}_k}{2} = 0.$$

Nous posons maintenant $C = \dfrac{2\pi k}{L}$, $\mathrm{TL} = C \cdot (a_1 \cdot i - a_2 \cdot i \cdot C^2 + a_4 \cdot C)$ et $\mathrm{TNL} = a_3 \cdot i \cdot C$.

Le système à résoudre est alors :

$$\begin{cases} a_0 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \widehat{u}_k + \sqrt{\nu} \cdot G_t^{1/2} \widehat{u}_k + \mathrm{TL} \cdot \widehat{u}_k + \mathrm{TNL} \cdot \dfrac{\widehat{u^2}_k}{2} = 0 \\ \widehat{u}_k(x,0) = \widehat{u}_k(0) \end{cases}.$$

Nous poserons pour la suite $U(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$,

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \widehat{U}_k + \sqrt{\nu} \cdot G_t^{1/2} \widehat{U}_k + \mathrm{TL} \cdot \left( \widehat{U}_k + \widehat{u_0} \right) + \mathrm{TNL} \cdot \dfrac{\widehat{(U+u_0)^2}_k}{2} = 0 \\ \widehat{U}_k(x,0) = 0 \end{cases}.$$

### Discrétisation en temps

Pour simplifier, nous considérons le schéma explicite suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \dfrac{\widehat{U}_k^{n+1} - \widehat{U}_k^n}{\Delta t} + \sqrt{\nu} \cdot G_t^{1/2} \widehat{U}_k^{n+1} + \mathrm{TL} \cdot \left( \widehat{U}_k^{n+1} + \widehat{u_0} \right) + \mathrm{TNL} \cdot \dfrac{\widehat{(U^{n+1})^2}_k}{2} = 0 \\ \widehat{U}_k(x,0) = 0 \end{array} \right. .$$

Nous avons

$$\sqrt{\nu} \cdot G_t^{1/2} \left( \widehat{U}_k^{n+1} \right) = \sqrt{\nu} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\Delta t}} \cdot \sum_{j=0}^{n+1} g_{n+1-j} U^j = \sqrt{\nu} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\Delta t}} \cdot \left( g_0 \widehat{U}_k^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} g_{n+1-j} U^j \right).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{U}_k^{n+1} = \left[ -\sqrt{\dfrac{3\nu\Delta t}{2}} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{n} g_{n+1-j} U^j + a_0 \cdot \widehat{U}_k^n - \Delta t \cdot \left( \mathrm{TL} \cdot \widehat{u_0} + \mathrm{TNL} \cdot \dfrac{\widehat{(U^{n+1})^2}_k}{2} \right) \right] / M1 \\ \widehat{U}_k(x,0) = 0 \end{array} \right.$$

où $M1 = a_0 + \Delta t \cdot \mathrm{TL} + \sqrt{\dfrac{3\nu\Delta t}{2}} \cdot g_0$.

**Résultats numériques**

Nous représentons ci-après la solution à différents temps en faisant varier $\mu$ et $\nu$. Les résultats numériques obtenus pour l'amortissement non-local en temps par nos codes sont en concordance avec ceux de [ChenDumDupGou10] (Figure II.37).

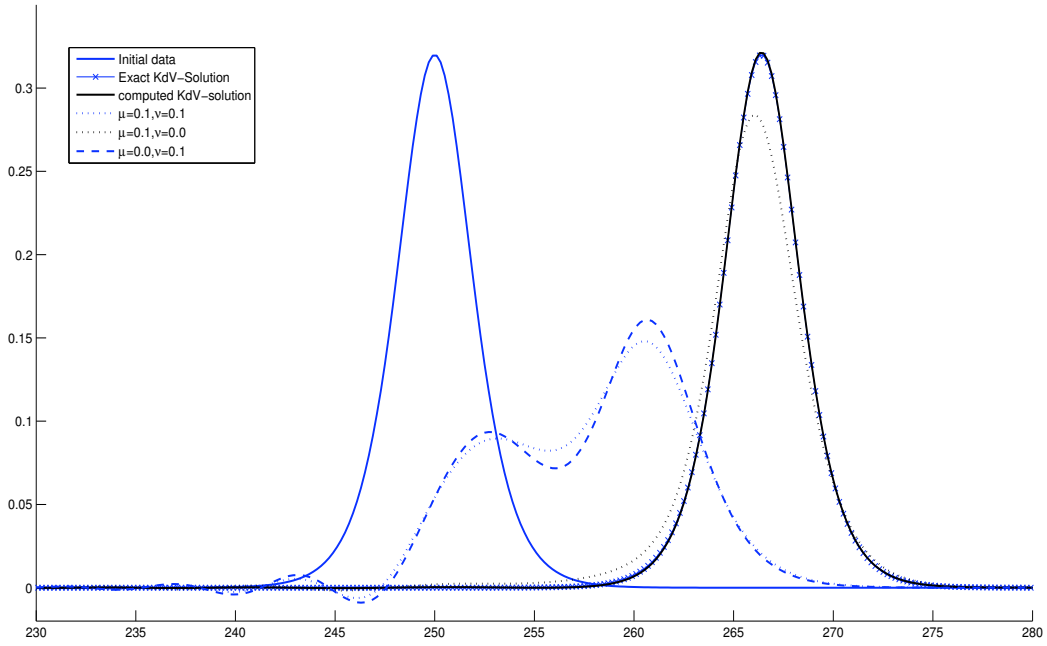



FIGURE II.37 – $T = 10, N = 2499, 0 < x < 500, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = \mu, f(x,t) = 0.$

## II.3 Comparaison des vitesses d'amortissement

Dans la Figure II.38, nous avons comparé l'effet des différents amortissements au cours du temps, à l'aide des fonctions G(t). Cette approche permet de dégager une hiérarchie assez nette dans les vitesses d'amortissement et nous rangeons les opérateurs $\mathcal{L}$ par ordre décroissant d'effet amortissant

1. $\mathcal{L}(u) = \nu \int_0^t \frac{u_t}{\sqrt{t-s}} ds$
2. $\mathcal{L}(u) = -\mu \partial_x^2 u$
3. $\mathcal{L}(u) = \gamma u$
4. $\mathcal{L}(u) = \gamma u \chi_{[a,b]}$
5. $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}_\gamma(u) = \sum_{k \in Z} \gamma_k \hat{u}_k e^{\frac{2ik\pi x}{L}}$, avec $\gamma_k = \frac{1}{1+|k|}$

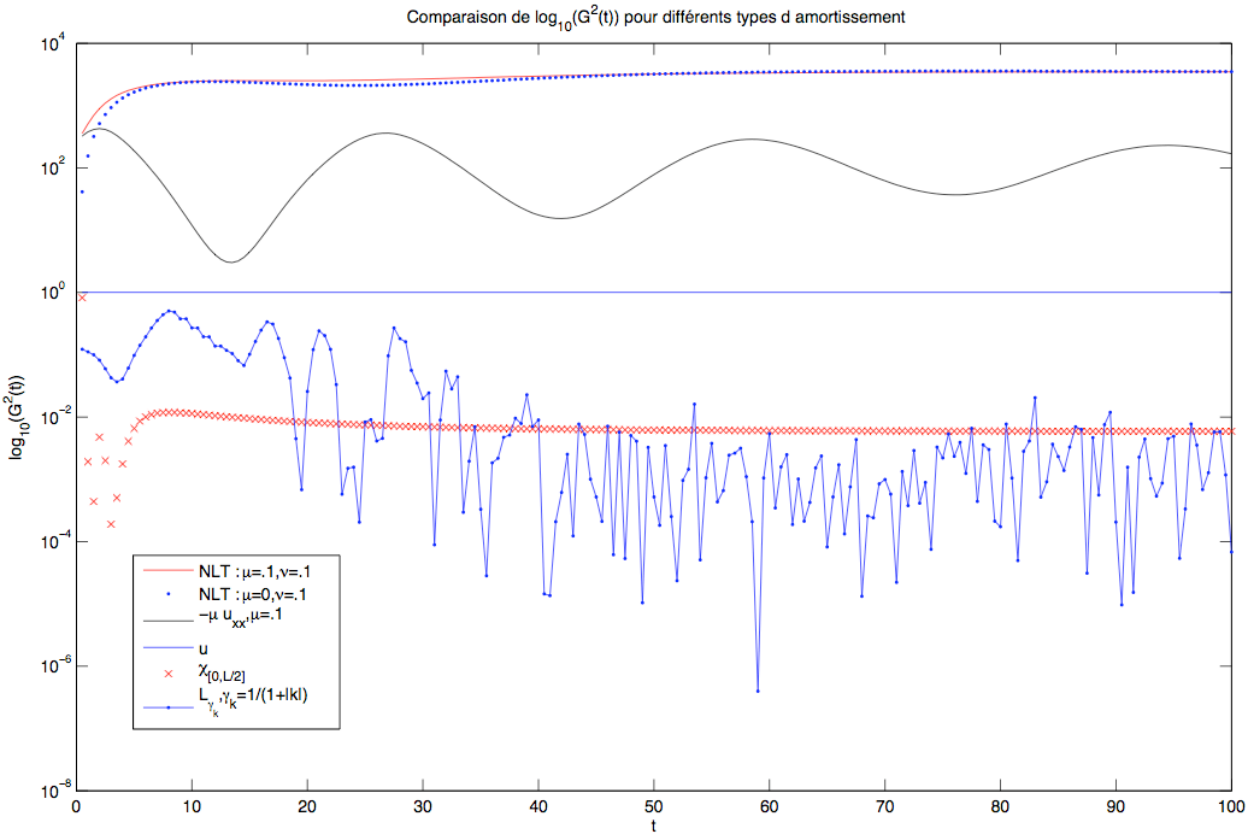



FIGURE II.38 – Comparaison de l'opérateur $G^2(t)$ de la solution pour différents types d'amortissement sur $[0, L]$ où $L = 20$.

## II.4 Conclusions et perspectives

La famille d'équations de KdV faiblement amortie que nous avons présentée ici permet de considérer des amortissements plus faibles que ceux étudiés dans [Ghi88, Ghi94, Gou00, GouRosa02] dans le sens que, quand $\gamma_k \to 0$ quand $|k| \to +\infty$,

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |u|_\gamma \leq c|u|_{L^2} \forall u \in L^2 \text{ et } \nexists d > 0 \text{ t.q. } d|u|_\gamma \geq |u|_{L^2} \forall u \in L^2,$$

pour lequel une propriété de régularisation asymptotique a été démontrée. Les illustrations numériques montrent que l'amortissement est toujours présent dans la norme de l'énergie, le problème principale étant que nous n'avons pas un contrôle uniforme sur le taux d'amortissement. En revanche, et comme dans le cas d'un faible amortissement considéré par Cabral et Rosa [CabRosa04] (voir aussi [AboAlmCalCheh11]), nous mettons en évidence par des simulations numériques, l'existence des solutions stationnaires et des solutions périodiques, ce qui signifie des dynamiques non trivial en grands temps. Comme perspectives possibles de ce présent travail, nous proposons :

1. L'analyse mathématique du comportement pour les grands temps de (II.6) reste encore à faire ; cela présente des difficultés techniques en raison de la non injection de $H_\gamma$ dans $L^2$ quand $\lim_{k\to+\infty} \gamma_k = 0$, il est alors utile de produire tout d'abord des résultats numériques.
2. Nous pouvons considérer de telles équations de KdV amorties quand les conditions aux limites ne sont pas périodiques. Il suffit de développer la solution dans une base propre (Hilbert) de polynômes orthogonaux $p_k$ par rapport aux poids pondérés des produits scalaires $(.,.)_\omega$ dans $L^2$. Nous avons alors

   $$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k p_k(x),$$

   où $\hat{u}_k = \dfrac{(u,p_k)_\omega}{(p_k,p_k)_\omega}$ et nous définissons l'opérateur linéaire d'amortissement $|u|_\gamma$ comme

   $$\mathcal{L}_\gamma(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k p_k(x).$$

   Plus largement, l'étude du comportement des grands temps des équations comme

   $$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_\gamma(u) + F(u) = 0,$$

   avec $Re(F(u),u)_\omega = 0$ et $|u|_\gamma$ défini comme ci-dessus, peut être traitée suivant la même approche. Par exemple les équations non linéaire amortie de Schrodinger comme présenté dans [AboAlmChehDumGou08] peuvent être considérées.
3. D'un point de vue numérique, l'amortissement lorsqu'il est traité implicitement dans un schéma en temps numérique, a une propriété de stabilisation. L'expression de Fourier de $|u|_\gamma$ permet d'étudier d'une façon précise l'effet de l'amortissement par ensemble de fréquences : cela peut être un premier pas avant la construction des opérateurs de filtrage pour stabiliser numériquement les schémas sans détruire la consistance, comme c'était fait par exemple dans [ChehCos04] pour des équations paraboliques non linéaires.

4. La fonction $G(t)$ introduite pour mesurer les effets de l'amortissement au cours du temps dans le cas de l'opérateur $\mathcal{L}_\gamma$ semble être un bon outil pour comparer l'effet de différents opérateurs d'amortissement sur de longue périodes temporelles. Nous avons ainsi pu observer que les amortissements non locaux en temps, tels que considérés dans [ChenDumDupGou10], sont plus forts que celui dissipatif classique ($\mathcal{L}(u) = -\mu\partial_x^2 u$) ; une analyse plus fine de la fonction $G(t)$, à l'aide par exemple d'une analyse en fréquences en temps, permettrait de quantifier plus précisément cette propriété.

# Bibliographie


[AboAlmCalCheh11] Mostafa Abounouh, Hassan Al Moatassime, Caterina Calgaro et Jean-Paul Chehab. A numerical scheme for the long time simulation of a forced damped KdV equation. *In preparation*. 73

[AboAlmChehDumGou08] Mostafa Abounouh, Hassan Al Moatassime, Jean-Paul Chehab, Serge Dumont et Olivier Goubet. Discrete schrödinger equations and dissipative dynamical systems. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 7(2) :211-227, 2008. PDF. 32, 58, 73

[CabRosa04] Marco Cabral et Ricardo Rosa. Chaos for a damped and forced KdV equation. *Phys. D*, 192, no. 3-4, 265-278, 2004. PDF. 24, 42, 50, 50, 53, 73

[ChehCos04] Jean-Paul Chehab et Bruno Costa. Time Explicit Schemes and Spatial Finite Differences splittings. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 20, No. 2, 159-189, 2004. PDF. 73

[ChenDumDupGou10] Min Chen, Serge Dumont, Louis Dupaigne et Olivier Goubet. Decay of solutions to a water wave model with nonlocal viscous dispersive term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Volume 27, Number 4, pp. 1473-1492, Août 2010. PDF. 70, 74

[Dub01] François Dubois. Code en fortran, juin 2001. PDF. 69

[DubGalPoi10] François Dubois, Ana-Cristina Galucio et Nelly Point. Introduction à la dérivation fractionnaire ; théorie et applications. *Techniques de l'ingénieur*, Ref AF510, avril 2010. PDF. 69

[DurSs00] Angel Durán et Jesús María Sanz Serna. The numerical integration of a relative equilibrium solutions. The nonlinear schrodinger equation. *IMA J. Num. Anal.*, 20 :235-261, 2000. PDF. 34

[Dut07] Denys Dutykh.*Modélisation mathématique des Tsunamis*, 256 p. Thèse : Mathématiques Appliquées : ENS - Cachan : 2007. PDF. 23, 23

[Ghi88] Jean-Michel Ghidaglia. Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time. *J. Diff. Eq.*, 74, pp 369-390, 1988. PDF. 23, 73

[Ghi94] Jean-Michel Ghidaglia. A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equations. *J. Diff. Eq.*, **110**, 356-359, 1994. PDF. 73, 73

[Gou00] Olivier Goubet. Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **6**, no. 3, 625-644, 2000. PDF. 23, 58, 73

[GouRosa02] Olivier Goubet et Ricardo Rosa. Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped KdV equation on the real line. *J. Differential Equations*, **185**, no. 1, 25-53, 2002. PDF. 23, 58, 73

[GotOrs97] David Gottlieb et Steven Alan Orszag. Numerical analysis of spectral methods : theory and applications. *SIAM Philadelphia*, 1997. PDF. 32

[LauRosiZha10] Camille Laurent, Lionel Rosier et Bing-Yu Zhang. Control stabilization of the Korterweg-De-Vries equation in a periodic domain. *Comm. PDE*, **35** : 707-744, 2010. PDF. 61, 63

[Lel92] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, **103**, 16-42, 1992. PDF. 61

[Mal98] Stéphane Mallat. A wavelet tour of signal processing. *Academic press*, 1998. PDF. 58

[MolVen10] Luc Molinet et Stéphane Vento. Sharp ill-posedness and well-posedness results for the KdV-Burgers equation : the periodic case. *Transactions of the American Mathematical Society*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society, 2010. PDF. 23

[OttSud69] Edward Ott et R.N. Sudan. Nonlinear theory of ion acoustic wave with Landau damping. *The Physics of fluids*,Vol 12, N 11, 1969. PDF. 22

[OttSud70] Edward Ott et R.N. Sudan. Damping of solitary waves. *The Physics of fluids*, Vol 13, N 6, 1970. PDF. 22

[RosiZha09] Lionel Rosier et Bing-Yu Zhang. Control and stabilization of the Korteweg-De-Vries equation : recent progresses. *JrL Syst Sci & Complexity*, **22** : 647-682, 2009. PDF. 61, 61, 63

[Tem97] Roger Temam. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag*, Second Edition, 1997. PDF. 30

[Ven10] Stéphane Vento. Asymptotic behavior for dissipative Korteweg-de Vrie equations. *Asymptot. Anal.*, **68**, no. 3, 155-186, 2010. PDF. 23

[Ven11] Stéphane Vento. Global well-posedness for dissipative Korteweg-de Vries equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **54**, 119-138 , 2011. PDF. 23

# Chapitre III

# SYSTÈMES DE BOUSSINESQ AMORTIS

Il a été souvent observé que les variations du fond pouvaient influer sur l'amortissement des vagues de *Tsunami* : la barrière de corail http://www.risques.gouv.fr/risques/risques-naturels/Tsunami/ ou bien les forêts sous-marines à l'abord des rivages, les mangroves http://www.vliz.be/imisdocs/publications/115329.pdf. Ces barrières sous-marines sont aussi utilisées pour prévenir les effets de la corrosion du littoral (voir les travaux de P. Azerad *et al.* [AzeBoucIvoIseMoh08, AzeBoucIvoIseMoh08]. Dans ces cas, le relief sous marin amortie l'énergie des vagues ; *a contrario*, dans d'autres situations on cherche à exploiter cette énergie : certaines sociétés proposent même des projets de barrières sous-marines érectiles pour produire de l'énergie à partir des vagues (voir http://www.aquamarinepower.com/).

On utilisera FreeFem++ [HecPioLehOht10] pour faire nos simulations en tenant compte des facilités qu'on peut avoir dans ce logiciel comme la construction simple du domaine, les choix des éléments finis, la définition des conditions aux bords, la technique d'adaptation de maillage et la création du domaine à travers des données $xyz$ (Script fait par Olivier Pantz [Pan11] ) en utilisant la méthode de level-set pour lisser le bord.

Chen, Goubet, Dougalis, Mitsotakis et Saut ont considérés des modèles 2D à fond plat ([ChenGou09, DouMitSau07]) puis à fond variable ([Chen09, DiaDut07, Mit09]), d'autre part Dutykh, Katsaounis et Mitsotakis ont développé un code en volumes finis pour le système de Boussinesq à fond variable en 1D ([DutKatMit11]) et Mitsotakis et al. en éléments finis de type Galerkin (en utilisants des B-splines [DouMitSau07]).

Nous proposons ici de développer un solveur éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec FreeFem++.
L'adéquation de la discrétisation éléments $\mathbb{P}_1$ a été établie par Walkley et Berzins [WalBer02]. L'avantage de FreeFem++ est que l'on peut exporter facilement des données bathymétriques et donc envisager des simulations plus réalistes.

Dans le chapitre 1, nous avons présenté l'obtention des systèmes de Boussinesq en

2D, dont nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier ces systèmes et de les simuler numériquement avec le logiciel FreeFem++, en considérant les cas suivant :

⋆ $D+\zeta = cte = 1$ où le fond est plat :

$$\eta_t + \nabla\cdot V + \nabla\cdot(\eta V) + a\Delta\nabla\cdot V - b\Delta\eta_t = 0 \tag{III.1}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 + c\Delta\nabla\eta - d\Delta V_t = 0. \tag{III.2}$$

Ici $\eta$ est l'élévation de la surface libre, $V$ le champ des vitesses, $D+\zeta = 1$ le fond et les constantes :

$$a = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right)\nu, b = \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right)(1-\nu), c = \frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)\mu, d = \frac{1}{2}\left(1-\theta^2\right)(1-\mu). \tag{III.3}$$

On présente dans le Tableau III.1 différents systèmes de Boussinesq en 2D.

| Système | $\theta^2$ | $\nu$ | $\mu$ | Références |
|---|---|---|---|---|
| BBM-BBM | $2/3$ | 0 | 0 | [Chen09, ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10] |
| Bona-Smith | $2/3 \leq \theta^2 \leq 1$ | 0 | $\frac{4-6\theta^2}{3(1-\theta^2)}$ | [ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10] |
| Boussinesq « général » | $0 \leq \theta^2 \leq 1$ | qcq | qcq | [ChenGou09, DouMitSau07, DouMitSau10] |

TABLE III.1 – Exemples des systèmes de Boussinesq en 2D.

⋆ $h = D(x,y)$ où le fond est variable dépendant de l'espace $(x,y)$ :

$$\eta_t+\nabla\cdot((D+\eta)V)+\nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V\right)+\nabla D\nabla\cdot V\right]+aD^2\nabla\left(\nabla\cdot(DV)\right)-bD^2\nabla\eta_t\right\}=0 \tag{III.4}$$

$$V_t+\nabla\eta+\frac{1}{2}\nabla|V|^2+CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t\right]+cD^2\Delta\nabla\eta-dD^2\Delta V_t=0. \tag{III.5}$$

⋆ $h = D(x,y) - \zeta(x,y,t)$ où le fond est dynamique :

$$\eta_t + \nabla\cdot(DV) + \nabla\cdot(\eta V) + \nabla\cdot(\zeta V) + \zeta_t + A\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t)$$
$$+\nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V\right)+\nabla D\nabla\cdot V\right]+aD^2\nabla\left(\nabla\cdot(DV)\right)-bD^2\nabla\eta_t\right\}=0, \tag{III.6}$$

$$V_t+\nabla\eta+\frac{1}{2}\nabla|V|^2+CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t\right]+cD^2\Delta\nabla\eta-dD^2\Delta V_t+CD\nabla\zeta_{tt}=0. \tag{III.7}$$

# III.1 Résolution du système de Boussinesq sur un fond plat

Dans cette section, nous vérifions tout d'abord que les simulations fournies par notre code numérique sont en concordance avec les résultats de la littérature récente, notamment les travaux de Dougalis, Mitsotakis et Saut [DouMitSau07, DouMitSau09, DouMitSau10]. Cela établit l'adéquation de la discrétisation éléments finis choisie.

## III.1.1 Résultats d'analyse des systèmes de Boussinesq

On rappelle le système générale de Boussinesq à fond plat $h = cte = 1$ :

$$\eta_t + \nabla \cdot V + \nabla \cdot (\eta V) + a\Delta\nabla \cdot V - b\Delta\eta_t = 0 \tag{III.8}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 + c\Delta\nabla\eta - d\Delta V_t = 0. \tag{III.9}$$

On note que les constantes dispersive $a, b, c$ et $d$ définies dans (III.3) satisfont les contraintes physiques (cf. [BonaChenSau04]) :

$$a + b + c + d = \frac{1}{3} \text{ et } c + d \geq 0 \tag{III.10}$$

Dans [DouMitSau07], Dougalis, Mitsotakis et Saut ont étudié le caractère bien posé du système de Boussinesq {(III.8,III.9)} et ont démontré que ce système est au moins non-linéairement localement bien posé. Ils ont établi le

**Théorème 28.** *Soit $s > 0$.*

*i- Supposons que $b > 0, d > 0, a < 0, c < 0$ ou $b > 0, d > 0, a = c \geq 0$. (les cas de Boussinesq général et BBM-BBM)*
*Soit $(\eta_0, V_0) \in H^s(\mathbb{R}^2)^3$. Alors, il existe $T > 0$ et une unique solution $(\eta, V) \in X_T = C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))^3$ du système {(III.8,III.9)} avec des conditions initiales $(\eta_0, V_0)$.*

*ii- Supposons que $b > 0, d > 0, a = 0, c < 0$. (le cas de Bona-Smith)*
*Soit $(\eta_0, V_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^2) \times H^s(\mathbb{R}^2)^2$. Alors, il existe $T > 0$ et une unique solution $(\eta, V) \in X_T = C([0,T]; H^{s+1}(\mathbb{R}^2)) \times C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))^2$ du système {(III.8,III.9)} avec les conditions initiales $(\eta_0, V_0)$.*

*iii- Supposons que $b > 0, d > 0, a < 0, c = 0$. (dans la suite, ce cas sera appelé BSAN)*
*Soit $(\eta_0, V_0) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^2) \times H^s(\mathbb{R}^2)^2$. Alors, il existe $T > 0$ et une unique solution $(\eta, V) \in X_T = C([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^2)) \times C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))^2$ du système {(III.8,III.9)} avec les conditions initiales $(\eta_0, V_0)$.*

*Démonstration.* on donne ici quelques idées de la preuve de ce théorème en suivant [DouMitSau07] :
le système {(III.8,III.9)} peut s'écrire en utilisant la transformation de Fourier comme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix}\hat{\eta}\\ \hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix}+i|\mathbf{k}|\mathcal{A}(\mathbf{k})\begin{pmatrix}\hat{\eta}\\ \hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\dfrac{k_1\widehat{\eta u}+k_2\widehat{\eta v}}{1+b|\mathbf{k}|^2}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{k_1}{1+d|\mathbf{k}|^2}\widehat{|V|^2}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{k_2}{1+d|\mathbf{k}|^2}\widehat{|V|^2}\end{pmatrix}=0,$$

où $V=(u,v)^T$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2)^T$, $|\mathbf{k}|=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ et

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{k_1}{|\mathbf{k}|}\left(\dfrac{1-a|\mathbf{k}|^2}{1+b|\mathbf{k}|^2}\right) & \dfrac{k_2}{|\mathbf{k}|}\left(\dfrac{1-a|\mathbf{k}|^2}{1+b|\mathbf{k}|^2}\right)\\ \dfrac{k_1}{|\mathbf{k}|}\left(\dfrac{1-c|\mathbf{k}|^2}{1+d|\mathbf{k}|^2}\right) & 0 & 0\\ \dfrac{k_2}{|\mathbf{k}|}\left(\dfrac{1-c|\mathbf{k}|^2}{1+d|\mathbf{k}|^2}\right) & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ sont $\{0,\pm\sigma(\mathbf{k})\}$, où

$$\sigma(\mathbf{k})=\sqrt{\frac{(1-a|\mathbf{k}|^2)\,(1-c|\mathbf{k}|^2)}{(1+b|\mathbf{k}|^2)\,(1+d|\mathbf{k}|^2)}}.$$

- Pour $b>0,d>0,a<0,c<0$ ou $b>0,d>0,a=c\geq 0$, alors $\sigma(\mathbf{k})$ est d'ordre 0. Par suite, pour $(\eta_0,V_0)\in H^s(\mathbb{R}^2)^3$, il existe $T>0$ et une unique solution $(\eta,V)\in X_T=C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))^3$ du système {(III.8,III.9)} avec des conditions initiales $(\eta_0,V_0)$.
- Pour $b>0,d>0,a=0,c<0$, alors $\sigma(\mathbf{k})$ est d'ordre $-1$. Par suite, pour $(\eta_0,V_0)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^2)\times H^s(\mathbb{R}^2)^2$, il existe $T>0$ et une unique solution $(\eta,V)\in X_T=C([0,T];H^{s+1}(\mathbb{R}^2))\times C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))^2$ du système {(III.8,III.9)} avec les conditions initiales $(\eta_0,V_0)$.
- Pour $b>0,d>0,a<0,c=0$, alors $\sigma(\mathbf{k})$ est d'ordre $+1$. Par suite, pour $(\eta_0,V_0)\in H^{s-1}(\mathbb{R}^2)\times H^s(\mathbb{R}^2)^2$, il existe $T>0$ et une unique solution $(\eta,V)\in X_T=C([0,T];H^{s-1}(\mathbb{R}^2))\times C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))^2$ du système {(III.8,III.9)} avec les conditions initiales $(\eta_0,V_0)$.

□

**Remarque 29.** *Pour le système KdV-KdV ($b=d=0,a=c=1/6$), Linares, Pilod et Saut ont démontré très récemment [LinPilSau11] le caractère bien-posé de ce système.*

En suivant [WalBer02], le système {(III.8,III.9)} s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\Upsilon-\Delta V &= 0;\\ \eta_t+\nabla\cdot V+\nabla\cdot(\eta V)+a\nabla\cdot\Upsilon-b\Delta\eta_t &= 0;\\ \Theta-\Delta\eta &= 0;\\ V_t+\nabla\eta+\tfrac{1}{2}\nabla|V|^2+c\nabla\Theta-d\Delta V_t &= 0,\end{aligned}\qquad\text{(III.11)}$$

où $\Upsilon = (\Upsilon^1, \Upsilon^2)^T$.
Le système de Boussinesq (III.11) est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned}
\Upsilon^1 - u_{xx} - u_{yy} &= 0;\\
\Upsilon^2 - v_{xx} - v_{yy} &= 0;\\
\Theta - \eta_{xx} - \eta_{yy} &= 0;\\
(Id - b\Delta)\eta_t + u_x + v_y + (\eta u)_x + (\eta v)_y + a(\Upsilon^1_x + \Upsilon^2_y) &= 0;\\
(Id - d\Delta)u_t + \eta_x + uu_x + vv_x + c\Theta_x &= 0;\\
(Id - d\Delta)v_t + \eta_y + uu_y + vv_y + c\Theta_y &= 0.
\end{aligned} \tag{III.12}$$

## III.1.2 Discrétisation en espaces

Dans cette section, nous allons présenter une technique pour résoudre le problème du système (III.12) en utilisant la méthode des éléments finis avec des éléments finis continues et linéaires par morceaux de type $\mathbb{P}_1$ (cf. [WalBer02]).
On aura recours dans notre code une technique d'adaptation de maillage qu'on peut utiliser soit en résolvant le problème en utilisant la méthode basée sur la déclaration des problèmes obtenus par la formulation faible des équations (III.12) ; soit en utilisant la deuxième méthode qui consiste à construire des matrices et des vecteurs pour résoudre un système direct de type $\mathcal{AX} = \mathcal{B}$, où la matrice $\mathcal{A}$ et les vecteurs $\mathcal{X}, \mathcal{B}$ seront définies dans la suite.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convexe, $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière quasi-uniforme de $\Omega$ avec des triangles de taille maximale $h < 1$ [BreSco94], soit $V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ un sous-espace de dimension fini de $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$ où $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}$ de degrés $\leq 1$ et soit $\langle\cdot;\cdot\rangle$ le produit scalaire dans $L^2$ sur $\Omega$.

Considérons la formulation faible du système (III.12), trouvons $\eta_h, u_h, v_h \in V_h$ tel que $\forall \phi_h \in V_h$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon^1_h; \phi_h\rangle - \langle u_{hxx}; \phi_h\rangle - \langle u_{hyy}; \phi_h\rangle &= 0;\\
\langle \Upsilon^2_h; \phi_h\rangle - \langle v_{hxx}; \phi_h\rangle - \langle v_{hyy}; \phi_h\rangle &= 0;\\
\langle \Theta_h; \phi_h\rangle - \langle \eta_{hxx}; \phi_h\rangle - \langle \eta_{hyy}; \phi_h\rangle &= 0;\\
\langle (Id - b\Delta)\eta_{ht}; \phi_h\rangle + \langle u_{hx}; \phi_h\rangle + \langle v_{hy}; \phi_h\rangle +&\\
\langle (\eta_h u_h)_x; \phi_h\rangle + \langle (\eta_h v_h)_y; \phi_h\rangle + a\left(\langle \Upsilon^1_{hx}; \phi_h\rangle + \left\langle (\Upsilon^2_{hy}; \phi_h\right\rangle\right) &= 0;\\
\langle (Id - d\Delta)u_{ht}; \phi_h\rangle + \langle \eta_{hx}; \phi_h\rangle + \langle u_h u_{hx}; \phi_h\rangle + \langle v_h v_{hx}; \phi_h\rangle + c\langle \Theta_{hx}; \phi_h\rangle &= 0;\\
\langle (Id - d\Delta)v_{ht}; \phi_h\rangle + \langle \eta_{hy}; \phi_h\rangle + \langle u_h u_{hy}; \phi_h\rangle + \langle v_h v_{hy}; \phi_h\rangle + c\langle \Theta_{hy}; \phi_h\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Pour simplifier, on note $\Phi = \phi_h, \mathcal{E} = \eta_h, \mathcal{U} = u_h, \mathcal{V} = v_h, \mathcal{T} = \Theta_h, \mathcal{P} = \Upsilon^1_h$ et $\mathcal{Q} = \Upsilon^2_h$, alors le système (III.13) est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}; \Phi\rangle &= \langle \mathcal{U}_{xx} + \mathcal{U}_{yy}; \Phi\rangle;\\
\langle \mathcal{Q}; \Phi\rangle &= \langle \mathcal{V}_{xx} + \mathcal{V}_{yy}; \Phi\rangle;\\
\langle \mathcal{T}; \Phi\rangle &= \langle \mathcal{E}_{xx} + \mathcal{E}_{yy}; \Phi\rangle;\\
\langle (Id - b\Delta)\partial_t \mathcal{E}; \Phi\rangle &= -\langle \mathcal{U}_x + \mathcal{V}_y + (\mathcal{EU})_x + (\mathcal{EV})_y + a(\mathcal{P}_x + \mathcal{Q}_y); \Phi\rangle = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{Q});\\
\langle (Id - d\Delta)\partial_t \mathcal{U}; \Phi\rangle &= -\langle \mathcal{E}_x + \mathcal{UU}_x + \mathcal{VV}_x + c\mathcal{T}_x; \Phi\rangle = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{T});\\
\langle (Id - d\Delta)\partial_t \mathcal{V}; \Phi\rangle &= -\langle \mathcal{E}_y + \mathcal{UU}_y + \mathcal{VV}_y + c\mathcal{T}_y; \Phi\rangle = \mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{T}).
\end{aligned} \tag{III.14}$$

### III.1.3 Discrétisation en temps

Notre méthode est basée sur un schéma explicite de second ordre de Runge-Kutta [Dem91]. A cette fin, notons par $(\mathcal{E}^{n+1},\mathcal{U}^{n+1},\mathcal{V}^{n+1})$ et $(\mathcal{E}^{n},\mathcal{U}^{n},\mathcal{V}^{n},\mathcal{P}^{n},\mathcal{Q}^{n},\mathcal{T}^{n})$ la valeur approximative au temps $t=t^{n+1}$ et $t=t^{n}$, respectivement ; et par $\delta t$ le pas de temps. Par suite, en utilisant (III.14), les inconnues au temps $t=t^{n+1}$ sont définis comme solution du système

$$\left\{\begin{array}{l}
\langle \mathcal{P}^{n};\Phi\rangle = \left\langle \mathcal{U}^{n}_{xx}+\mathcal{U}^{n}_{yy};\Phi\right\rangle;\\
\langle \mathcal{Q}^{n};\Phi\rangle = \left\langle \mathcal{V}^{n}_{xx}+\mathcal{V}^{n}_{yy};\Phi\right\rangle;\\
\langle \mathcal{T}^{n};\Phi\rangle = \left\langle \mathcal{E}^{n}_{xx}+\mathcal{E}^{n}_{yy};\Phi\right\rangle;\\
\langle \mathcal{E}^{n+1};\Phi\rangle = \langle \mathcal{E}^{n}+\dfrac{\mathcal{E}^{k1}+\mathcal{E}^{k2}}{2};\Phi\rangle;\\
\langle \mathcal{U}^{n+1};\Phi\rangle = \langle \mathcal{U}^{n}+\dfrac{\mathcal{U}^{k1}+\mathcal{U}^{k2}}{2};\Phi\rangle;\\
\langle \mathcal{V}^{n+1};\Phi\rangle = \langle \mathcal{V}^{n}+\dfrac{\mathcal{V}^{k1}+\mathcal{V}^{k2}}{2};\Phi\rangle.
\end{array}\right. \tag{III.15}$$

où :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\left\langle (Id-b\Delta)\mathcal{E}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{n},\mathcal{U}^{n},\mathcal{V}^{n},\mathcal{P}^{n},\mathcal{Q}^{n}\right);\\
\left\langle (Id-d\Delta)\mathcal{U}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{G}\left(\mathcal{E}^{n},\mathcal{U}^{n},\mathcal{V}^{n},\mathcal{T}^{n}\right);\\
\left\langle (Id-d\Delta)\mathcal{V}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{H}\left(\mathcal{E}^{n},\mathcal{U}^{n},\mathcal{V}^{n},\mathcal{T}^{n}\right);\\
\left\langle \mathcal{P}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \left\langle \mathcal{U}^{k1}_{xx}+\mathcal{U}^{k1}_{yy};\Phi\right\rangle;\\
\left\langle \mathcal{Q}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \left\langle \mathcal{V}^{k1}_{xx}+\mathcal{V}^{k1}_{yy};\Phi\right\rangle;\\
\left\langle \mathcal{T}^{k1};\Phi\right\rangle &=& \left\langle \mathcal{E}^{k1}_{xx}+\mathcal{E}^{k1}_{yy};\Phi\right\rangle.
\end{array}\right. \tag{III.16}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\left\langle (Id-b\Delta)\mathcal{E}^{k2};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{F}\left(\mathcal{E}^{n}+\mathcal{E}^{k1},\mathcal{U}^{n}+\mathcal{U}^{k1},\mathcal{V}^{n}+\mathcal{V}^{k1},\mathcal{P}^{n}+\mathcal{P}^{k1},\mathcal{Q}^{n}+\mathcal{Q}^{k1}\right);\\
\left\langle (Id-d\Delta)\mathcal{U}^{k2};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{G}\left(\mathcal{E}^{n}+\mathcal{E}^{k1},\mathcal{U}^{n}+\mathcal{U}^{k1},\mathcal{V}^{n}+\mathcal{V}^{k1},\mathcal{T}^{n}+\mathcal{T}^{k1}\right);\\
\left\langle (Id-d\Delta)\mathcal{V}^{k2};\Phi\right\rangle &=& \delta t\cdot\mathcal{H}\left(\mathcal{E}^{n}+\mathcal{E}^{k1},\mathcal{U}^{n}+\mathcal{U}^{k1},\mathcal{V}^{n}+\mathcal{V}^{k1},\mathcal{T}^{n}+\mathcal{T}^{k1}\right).
\end{array}\right. \tag{III.17}$$

On remarque que le système (III.15) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\mathcal{M}&0&0\\0&\mathcal{M}&0\\0&0&\mathcal{M}\end{pmatrix}}_{\mathcal{A}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\mathcal{E}^{n+1}\\\mathcal{U}^{n+1}\\\mathcal{V}^{n+1}\end{pmatrix}}_{\mathcal{X}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\langle \mathcal{E}^{n}+\dfrac{\mathcal{E}^{k1}+\mathcal{E}^{k2}}{2};\Phi\rangle\\ \langle \mathcal{U}^{n}+\dfrac{\mathcal{U}^{k1}+\mathcal{U}^{k2}}{2};\Phi\rangle\\ \langle \mathcal{V}^{n}+\dfrac{\mathcal{V}^{k1}+\mathcal{V}^{k2}}{2};\Phi\rangle\end{pmatrix}}_{\mathcal{B}} \tag{III.18}$$

**Algorithme :**

Finalement, pour résoudre le système III.18, nous suivons comme :

Posons $\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^0 = \eta_{h0} = \eta_0, \mathcal{U}^n = \mathcal{U}^0 = u_{h0} = u_0, \mathcal{V}^n = \mathcal{V}^0 = v_{h0} = v_0$
Posons $\mathcal{P}^n = P_{h0}, \mathcal{Q}^n = Q_{h0}, \mathcal{T}^n = T_{h0}, \mathcal{P}^{k1} = P_{hk1}, \mathcal{Q}^{k1} = Q_{hk1}, \mathcal{T}^{k1} = T_{hk1}$
Posons $\mathcal{E}^{n+1} = \eta_h, \mathcal{U}^{n+1} = u_h, \mathcal{V}^{n+1} = v_h$
Posons $\mathcal{E}^{k1} = \eta_{hk1}, \mathcal{U}^{k1} = u_{hk1}, \mathcal{V}^{k1} = v_{hk1}, \mathcal{E}^{k2} = \eta_{hk2}, \mathcal{U}^{k2} = u_{hk2}, \mathcal{V}^{k2} = v_{hk2}$
Calculons $\mathcal{A}$
Pour $t = 0 : \delta t : T$
    Adaptation du maillage, (optionnel)
    Actualisation $\eta_{h0} = \eta_{h0}; u_{h0} = u_{h0}; v_{h0} = v_{h0}; \eta_h = \eta_h; u_h = u_h; v_h = v_h;$
    Calculons $P_{h0}, Q_{h0}, T_{h0}$
    Calculons $\eta_{hk1}, u_{hk1}, v_{hk1}$
    Calculons $P_{hk1}, Q_{hk1}, T_{hk1}$
    Calculons $\eta_{hk2}, u_{hk2}, v_{hk2}$
    Posons $\mathcal{X} = [\eta_h, u_h, v_h]$
    Calculons $\mathcal{B}$
    Résoudre $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$
    Posons $\eta_{h0} = \eta_h, u_{h0} = u_h, v_{h0} = v_h$
fin pour

## III.1.4 Simulations Numériques

On montre dans la Figure III.1, que le schéma en temps RK2 considéré pour le système de BBM-BBM est bien d'ordre 2. Dans cet exemple, on a pris des conditions de Dirichlet homogène pour $\eta, u, v$ et on a considéré les solutions exactes suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_{ex} &= e^t \cdot \sin(\pi x) \cdot (y-1) \cdot y, \\ u_{ex} &= e^t \cdot x \cdot \cos(3\pi x/2) \cdot \sin(\pi y), \\ v_{ex} &= e^t \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(3\pi y/2) \cdot y. \end{aligned}$$

Ensuite, on a calculé le second terme correspondant afin d'obtenir la norme $L^2$ de l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique (cf. Table III.2).

| N | $\lvert\eta_h - \eta_{ex}\rvert_{L^2}$ | $\lvert u_h - u_{ex}\rvert_{L^2}$ | $\lvert v_h - v_{ex}\rvert_{L^2}$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 0.00871494 | 0.0233966 | 0.0230945 |
| 20 | 0.00265707 | 0.00641675 | 0.00632314 |
| 40 | 0.000670301 | 0.00160223 | 0.00157848 |
| 80 | 0.0001817 | 0.000419198 | 0.000412791 |
| 160 | 4.80657e-05 | 0.000108456 | 0.000106767 |

TABLE III.2 – Norme $L^2$ de l'erreur pour $\eta, u, v$.

Dans les Figures III.2 à III.10, nous présentons les résultas des simulations numériques de l'évolution d'un fluide initialement localisé de vitesse initiale nulle. Sauf indication, tous les calculs ont été effectués sur le carré $\Omega = [-40, 40] \times [-40, 40]$, des fonctions $\mathbb{P}_1$ linéaires continues par morceaux ont été utilisées pour l'espace des éléments finis, on travaille aussi

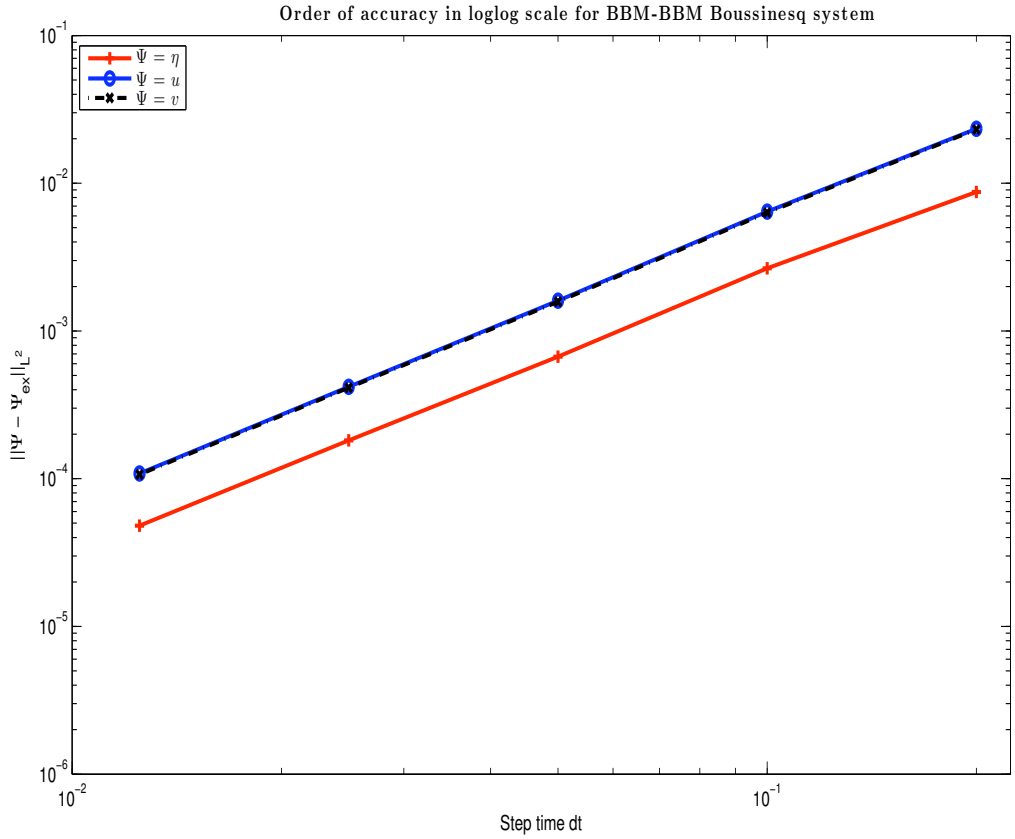



FIGURE III.1 – Le taux de précision pour BBM-BBM.

avec le pas de discrétisation en espace $\Delta x = 0.5$ et le pas de temps $\Delta t = 0.1$. A la fin de cette partie, on présentera d'autres simulations sur différents domaines qu'on précisera dans la suite.

**Reflet des ondes symétriques sur deux parties du bord pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$.**

Dans les Figures III.2,III.3,III.4 nous montrons la réflexion de deux parties de bords de la propagation de l'onde symétrique du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$. Pour cette expérience, nous avons utilisé comme données initiales les fonctions

$$\eta_{h0}(x, y) = .2e^{-(x^2+y^2)/5}, u_{h0}(x, y) = v_{h0}(x, y) = 0$$

et pour les conditions aux bords, nous avons utilisé des conditions mixtes *ie* :

$$\begin{array}{rl} \frac{\partial \eta_h}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_h = v_h = 0 & \text{si x = 40 et y = -40} \\ \frac{\partial u_h}{\partial n} = \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0 & \text{si x = -40 et y = 40} \end{array}$$

Cela implique qu'on a des conditions de Neumann homogènes pour $\eta_h$ sur toutes les frontières, des conditions de type zéro-Dirichlet pour $u_h$ et $v_h$ sur $x = -40$ et $y = 40$ (où on a des murs), et des conditions au limites de type Neumann homogènes pour $u_h$ et $v_h$ sur $x = 40$ et $y = -40$. La propagation de l'onde est reflétée des deux parties du bord $x = -40$ et $y = 40$.
On remarque que dans la Figure III.2 on montre l'effet de l'adaptation de maillage suivant l'évolution de $\eta_h$ en temps, en effet le maillage est raffiné d'où la différence entre $\eta_h$ et le plan $z = 0$ est d'ordre $10^{-4}$. Dans la Figure III.4 on montre la section transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $y$ où $x = 0$.

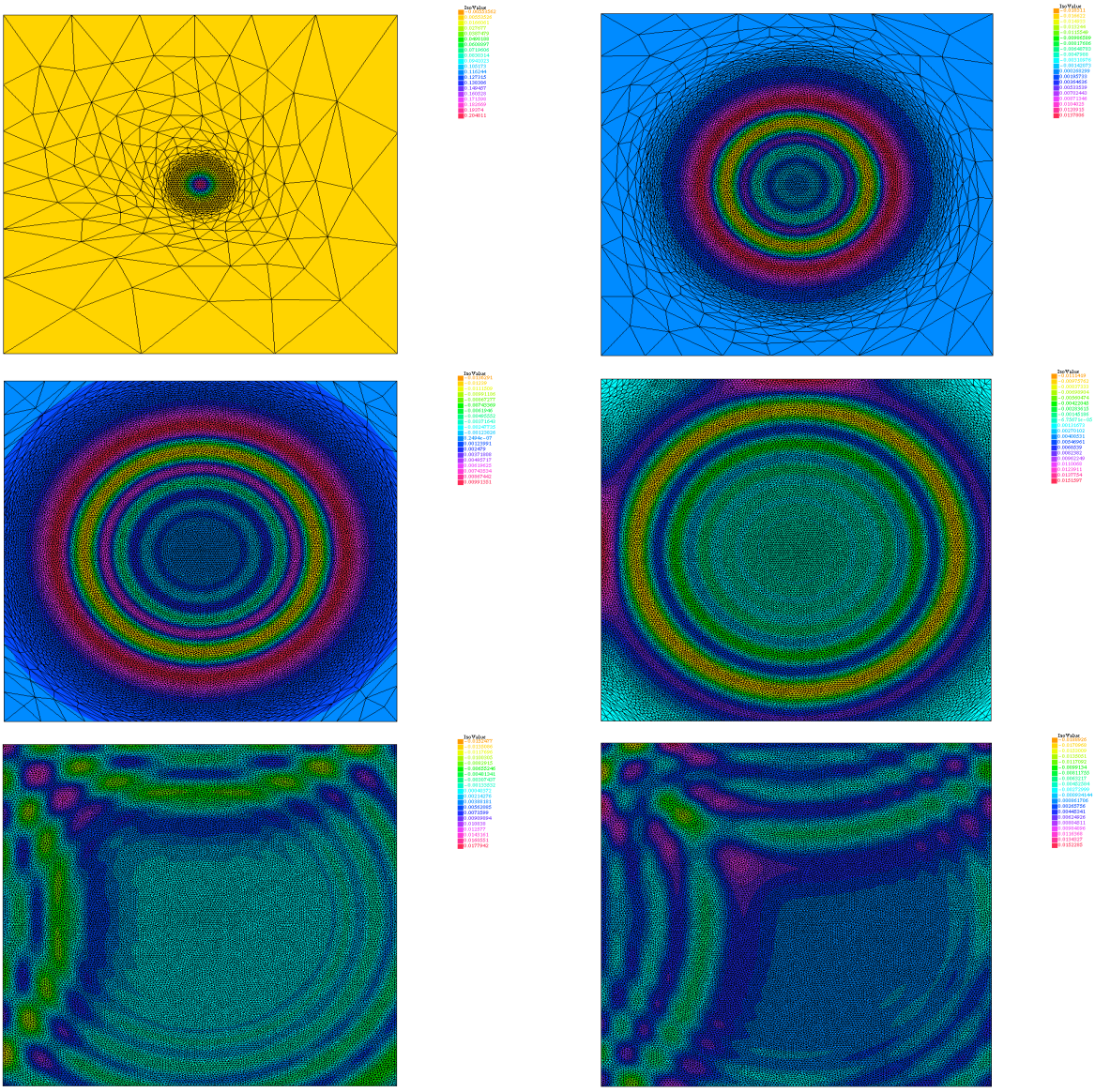


FIGURE III.2 – Affichage de la solution et du maillage du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0.1, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_adaptmesh.avi.

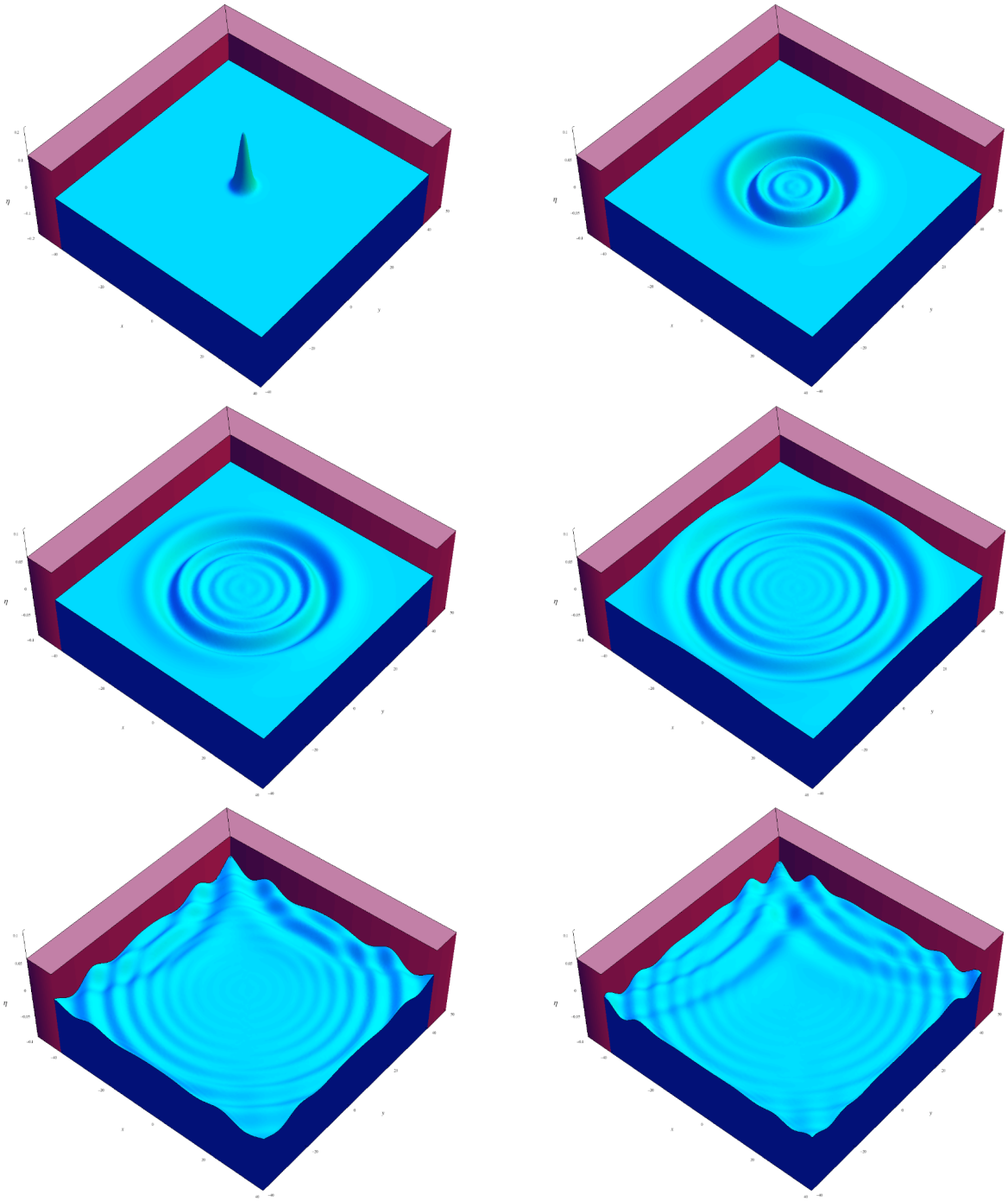


FIGURE III.3 – Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Gaussian.avi.

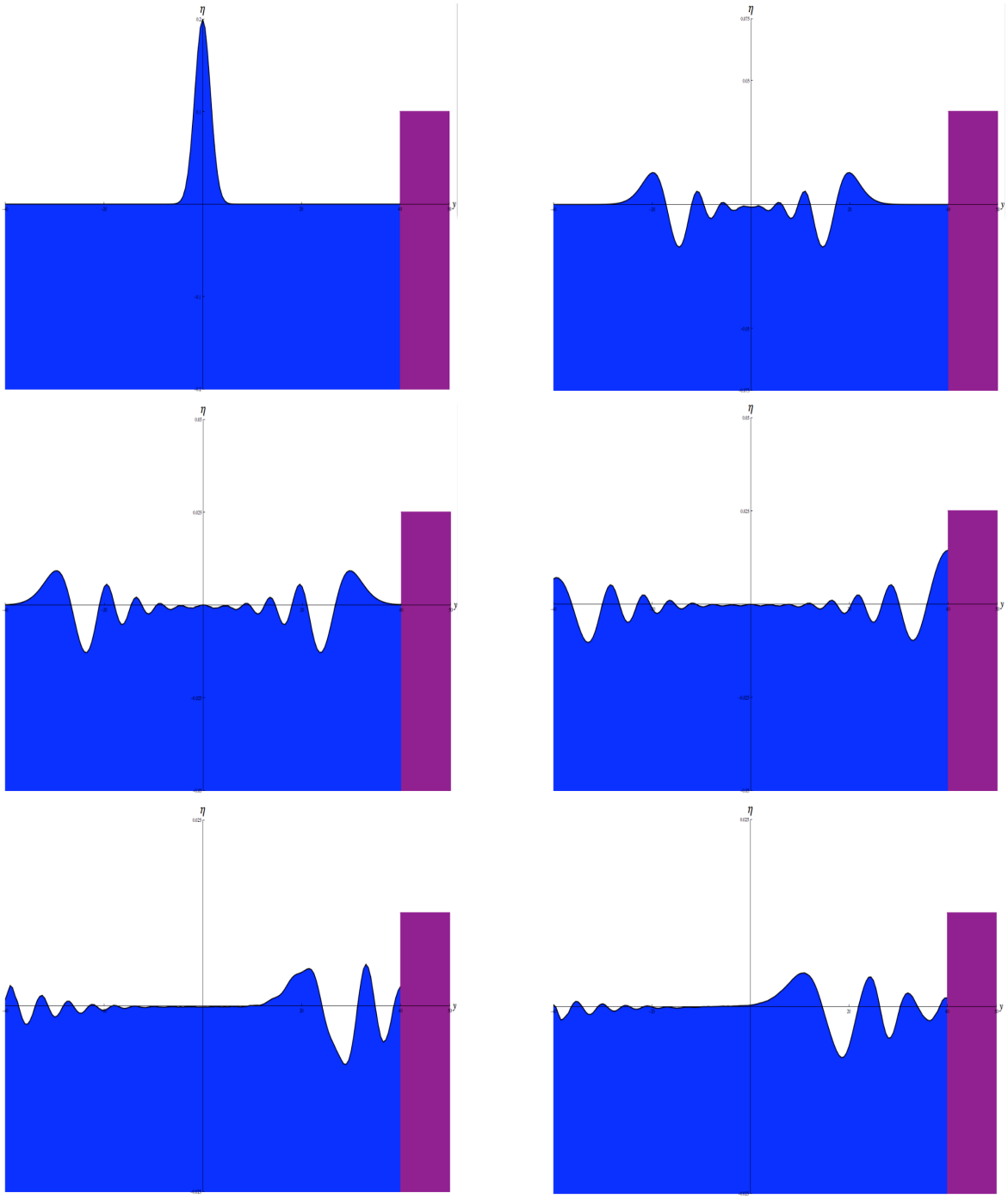


FIGURE III.4 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Gaussian_cut.avi.

**Propagation des ondes symétriques pour le système Bona-Smith**

Dans la Figure III.5 on présente l'évolution du profil de $\eta_h$ provenant de la donnée initiale radiale et symétrique $\eta_{h0}(x,y) = 0.2e^{-(x^2+y^2)/5}, u_{h0}(x,y) = v_{h0}(x,y) = 0$,

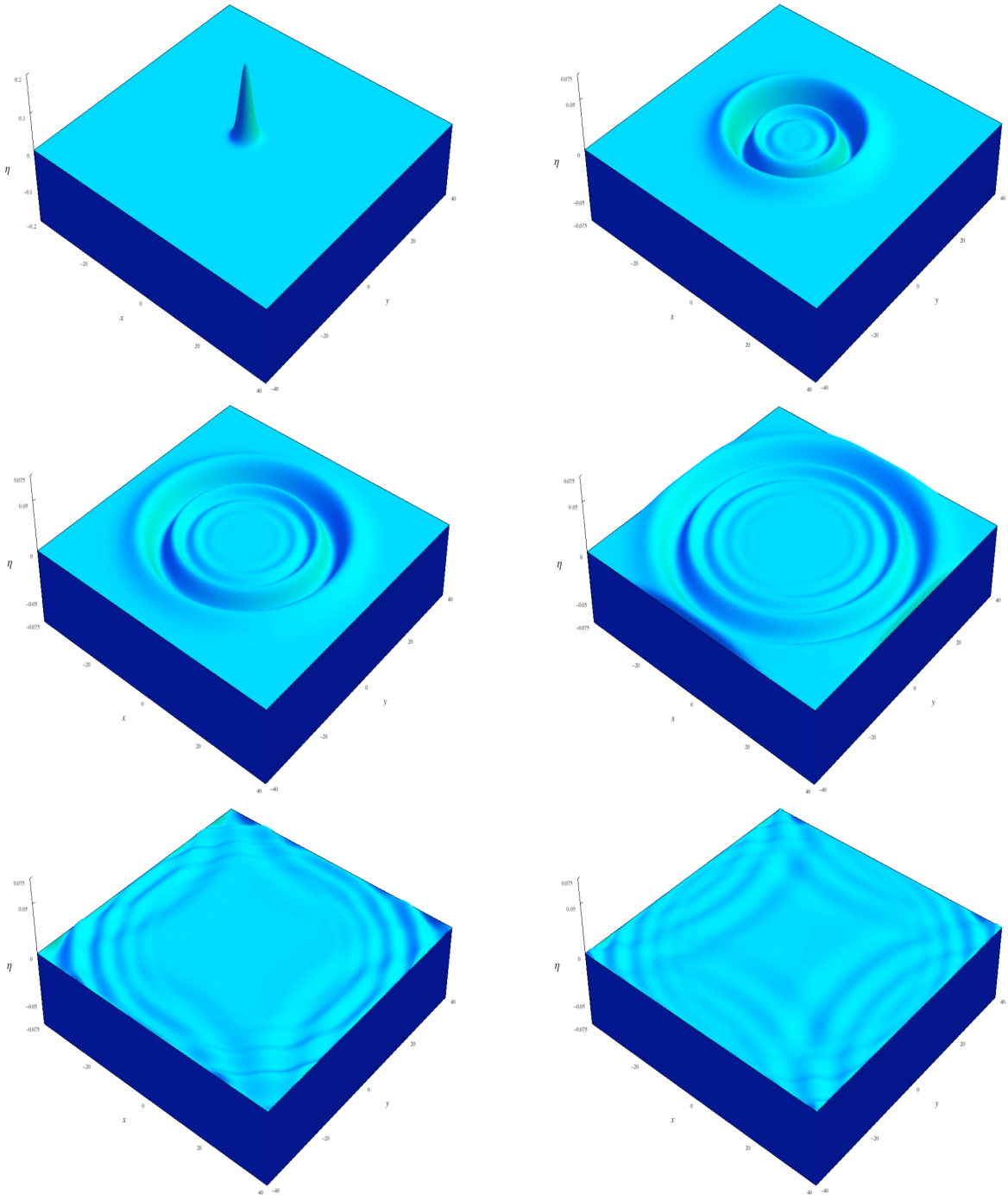


FIGURE III.5 – Solution du système Bona-Smith où $a = 0, b = d = 1/3$ et $c = -1/3$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BS_Gaussian.avi.

pour le système Bona-Smith où $a = 0, b = d = 1/3$ et $c = -1/3$ avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogène pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ sur tout le bord du domaine. Dans la Figure III.6 on montre la section transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $y$ où $x = 0$.

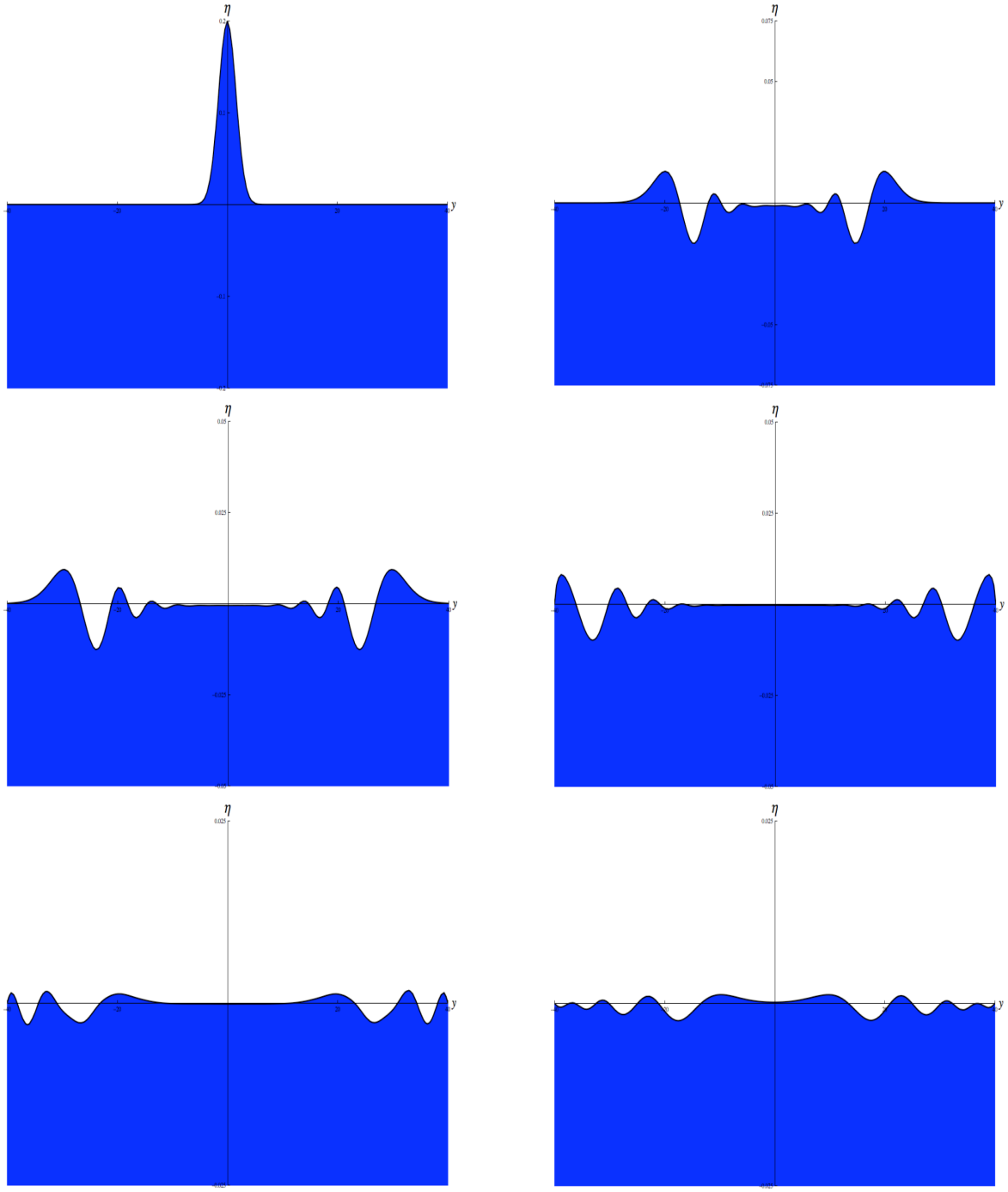


FIGURE III.6 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système Bona-Smith où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ for different time $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BS_Gaussian_cut.avi.

**Reflet des ondes symétriques sur toutes les frontières pour le système de Boussinesq où $c = 0$.**

On montre dans la Figure III.7 l'évolution du profil de $\eta_h$ pour le système de Boussinesq où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$, où on a pris comme données initiales

$$\eta_{h0}(x, y) = 0.2e^{-(x^2+y^2)/5}, u_{h0}(x, y) = v_{h0}(x, y) = 0$$

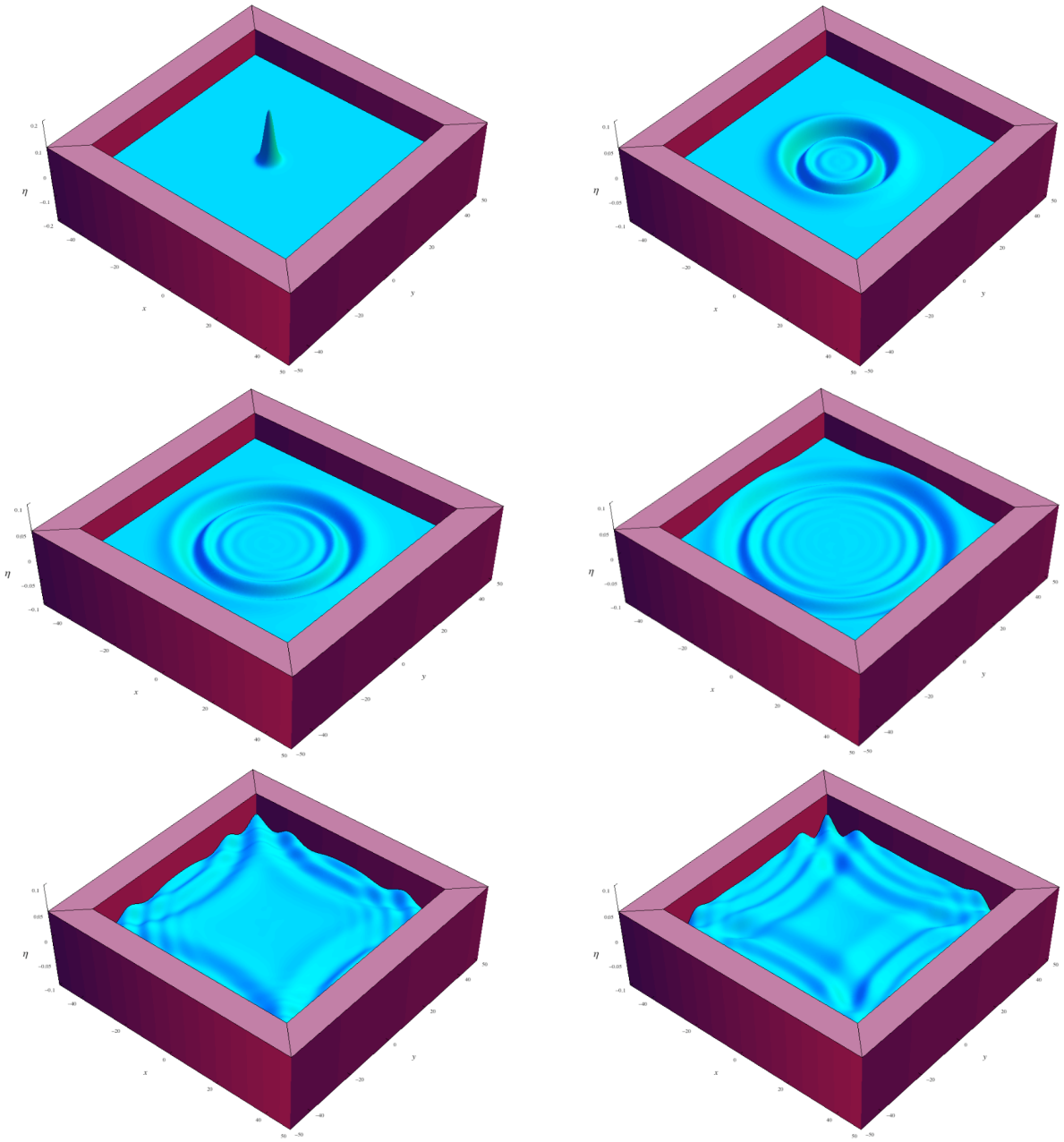


FIGURE III.7 – Solution du système de Boussinesq où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BSAN_Gaussian.avi.

et des conditions aux bords réflexives sur tout le bord où des conditions aux bords de type Neumann homogènes ont été prises pour $\eta_h$ et des conditions aux bords de types Dirichlet homogène pour $u_h$ et $v_h$ sur tout le bord. Puis, dans la Figure III.8, on montre la section transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $y$ où $x = 0$.

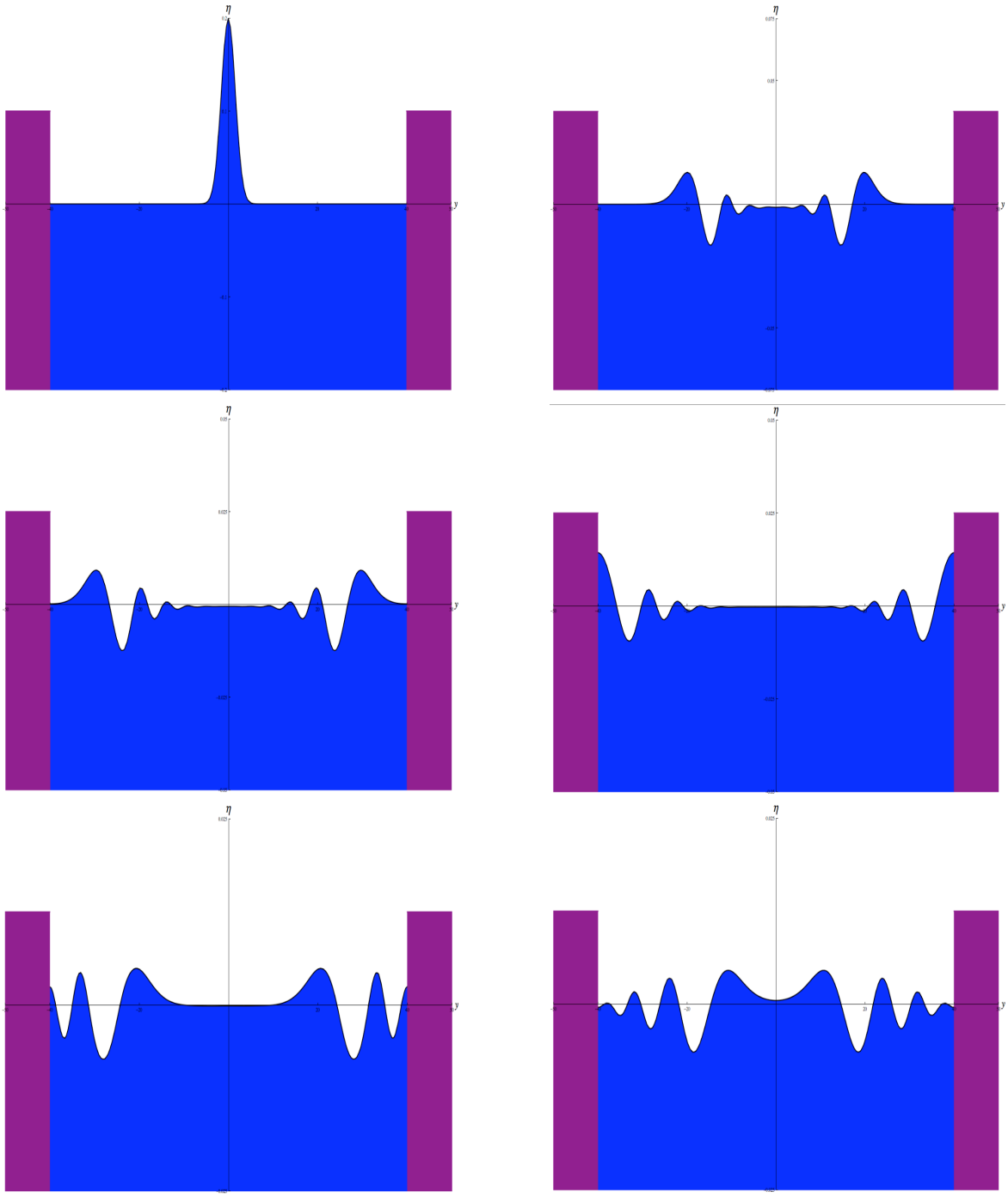


FIGURE III.8 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système de Boussinesq où $a = -1/3, b = d = 1/3$ et $c = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BSAN_Gaussian_cut.avi.

**Propagation des ondes symétriques pour le système général de Boussinesq**

Dans la Figure III.9 on présente l'évolution du profil de $\eta_h$ émanant de la donnée initiale radiale symétrique $\eta_{h0}(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)/5}, u_{h0}(x,y) = v_{h0}(x,y) = 0$,

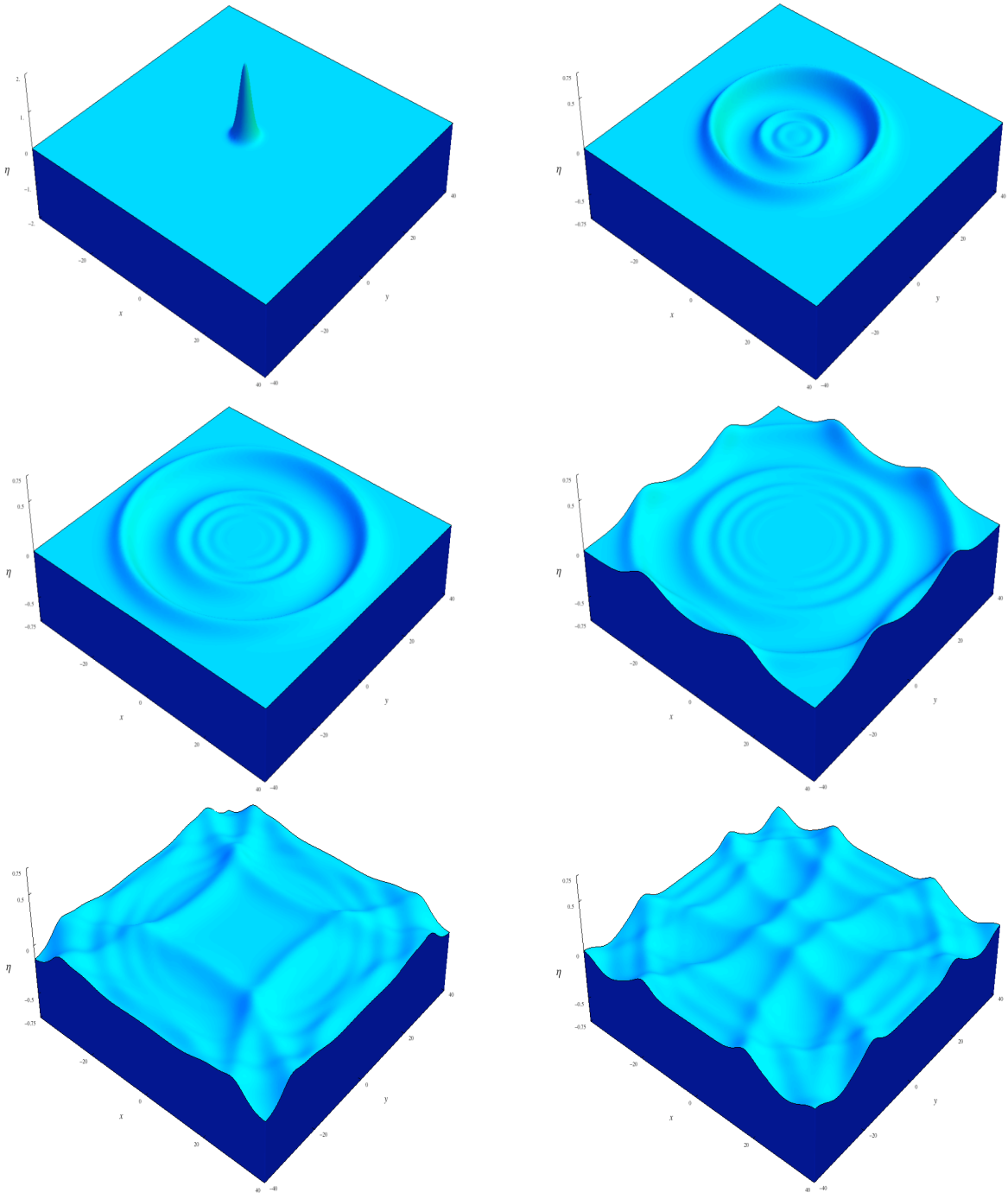


FIGURE III.9 – Solution du système général de Boussinesq où $a = c = -1/12$ et $b = d = 1/4$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/GB_Gaussian.avi.

pour le système général de Boussinesq où $a = c = -1/12$ et $b = d = 1/4$ avec des conditions aux bords bi-périodiques pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ et dans la Figure III.10 on montre la section transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $y$ où $x = 0$.

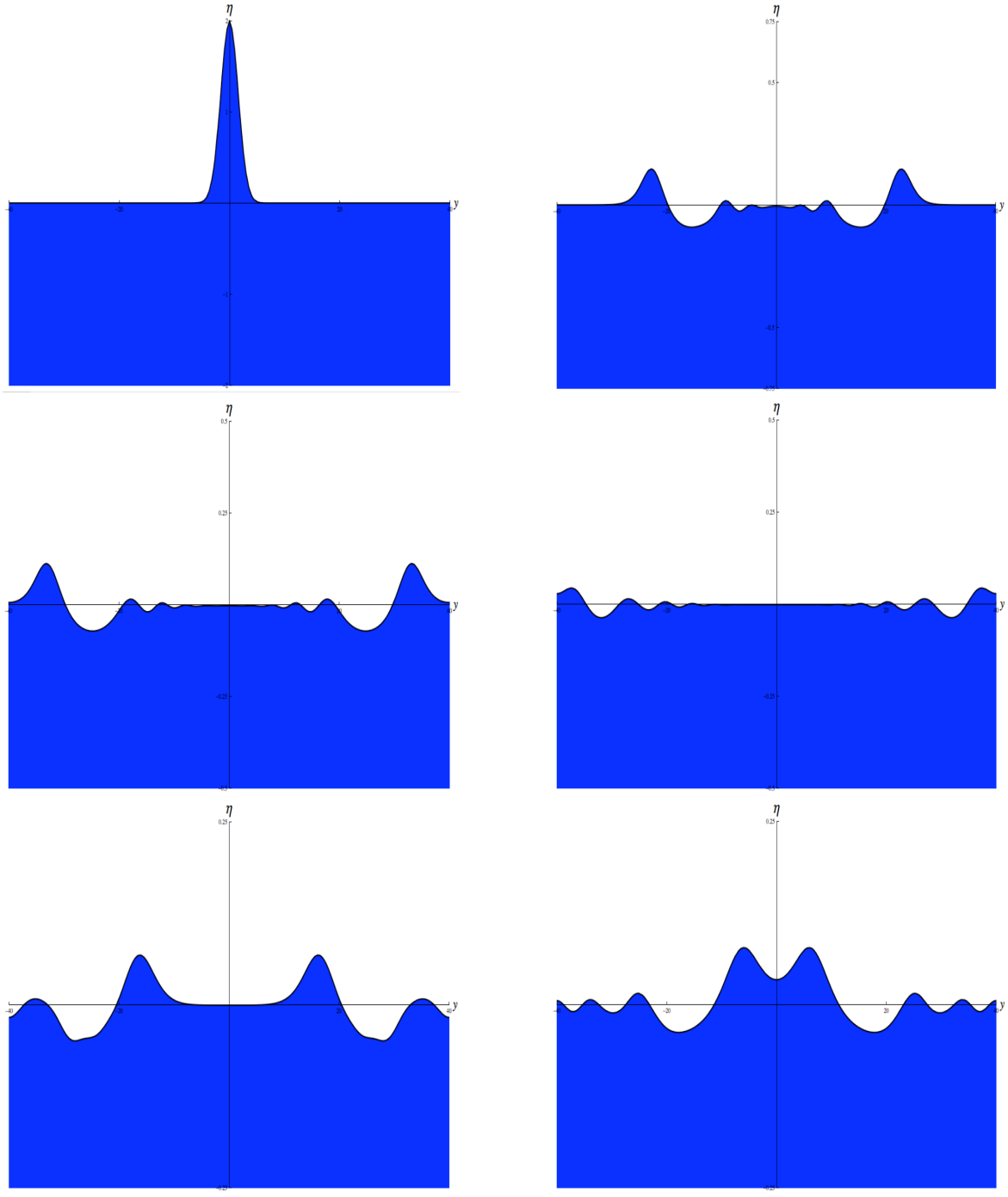


FIGURE III.10 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système général de Boussinesq où $a = c = -1/12$ et $b = d = 1/4$ pour les différents temps $t = \{0, 20, 30, 40, 60, 70\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/GB_Gaussian_CUT.avi.

On remarque ici que sous ces conditions bi-périodiques pour $\eta$, $u$ et $v$ et leurs dérivées, en plus en intégrant les équations (III.1) et (III.2) sur tout le domaine, on déduit la conservation de la masse suivante :

$$(Id - b\Delta)\int_\Omega \eta_t = 0 \text{ et la relation } (Id - d\Delta)\int_\Omega u_t = 0, (Id - d\Delta)\int_\Omega v_t = 0$$

Par suite :

$$\int_\Omega \eta = cte = \int_\Omega \eta_0, \qquad \int_\Omega u = cte = \int_\Omega u_0, \qquad \int_\Omega v = cte = \int_\Omega v_0. \tag{III.19}$$

D'autre part, numériquement, on constate que ces quantités définies sont bien conservées au cours du temps et on a :

$$\int_\Omega \eta = cte = \int_\Omega \eta_0 = 31.3811, \qquad \int_\Omega u = cte = \int_\Omega u_0 = 0, \qquad \int_\Omega v = cte = \int_\Omega v_0 = 0.$$

**Propagation des ondes pour le système KdV-KdV de Boussinesq**

Dans la Figure III.11, on présente l'évolution du profil de $\eta_h$ émanant de la donnée initiale radiale symétrique

$$\eta_{h0}(x, y) = .5e^{-(x^2+y^2)/5}, u_{h0}(x, y) = v_{h0}(x, y) = 0,$$

pour le système KdV-KdV de Boussinesq où $a = c = 1/6$ et $b = d = 0$. On a utilisé des conditions aux limites bi-périodique pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ avec le pas de temps $\Delta t = 0.001$. Dans la Figure III.12 on montre la section transversale correspondante du profil de $\eta_h$ dans la direction des $y$ où $x = 0$.
De même, grâce aux conditions aux limites bi-périodiques on a la conservation des quantités dans $(III.19)$ et on a au cours du temps, numériquement :

$$\int_\Omega \eta = cte = \int_\Omega \eta_0 = 7.84527, \qquad \int_\Omega u = cte = \int_\Omega u_0 = 0, \qquad \int_\Omega v = cte = \int_\Omega v_0 = 0.$$

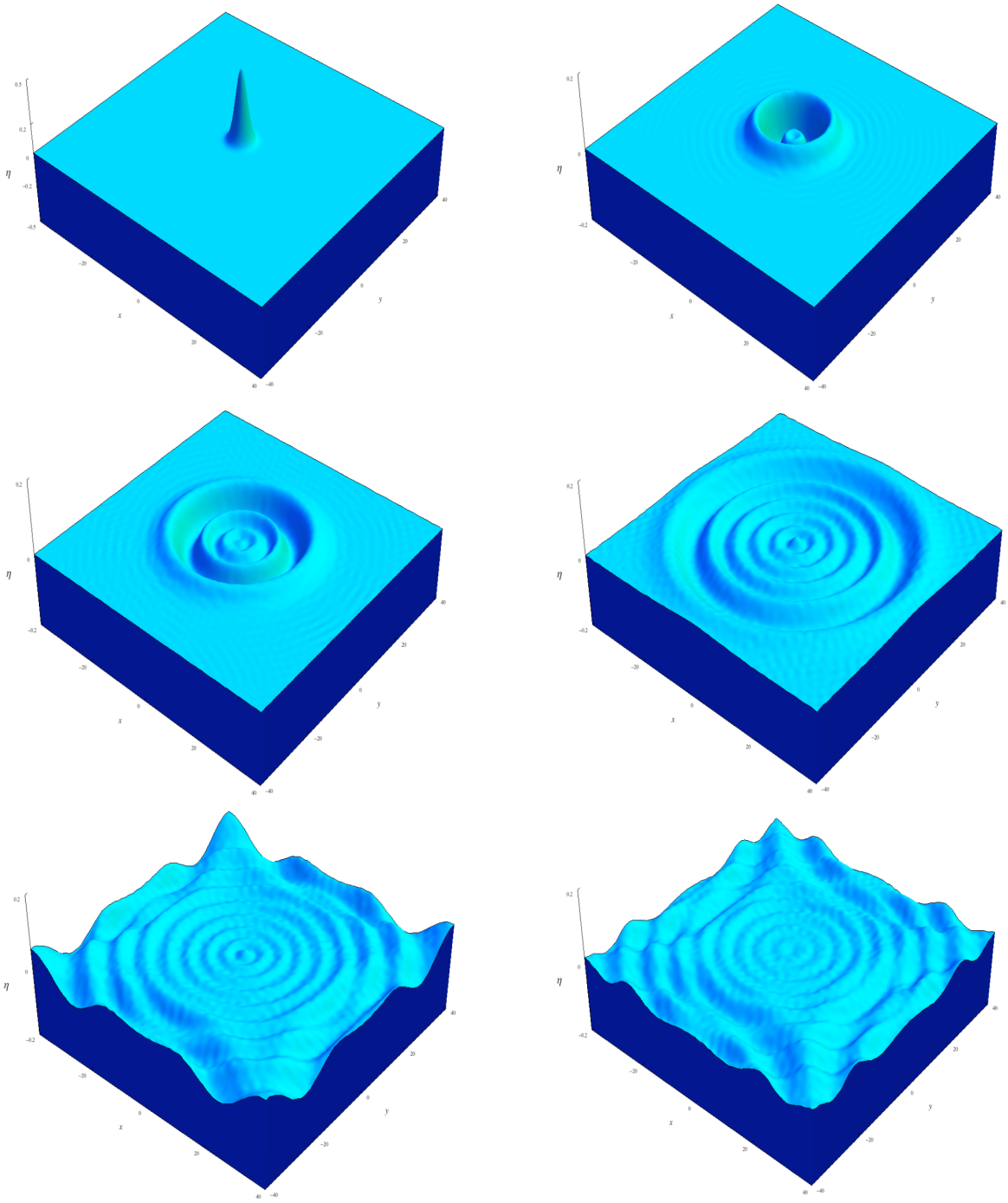


FIGURE III.11 – Solution du système KdV-KdV de Boussinesq où $a = c = 1/6$ et $b = d = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 10, 20, 35, 55, 60\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/KdV_KdV_Gaussian.avi.

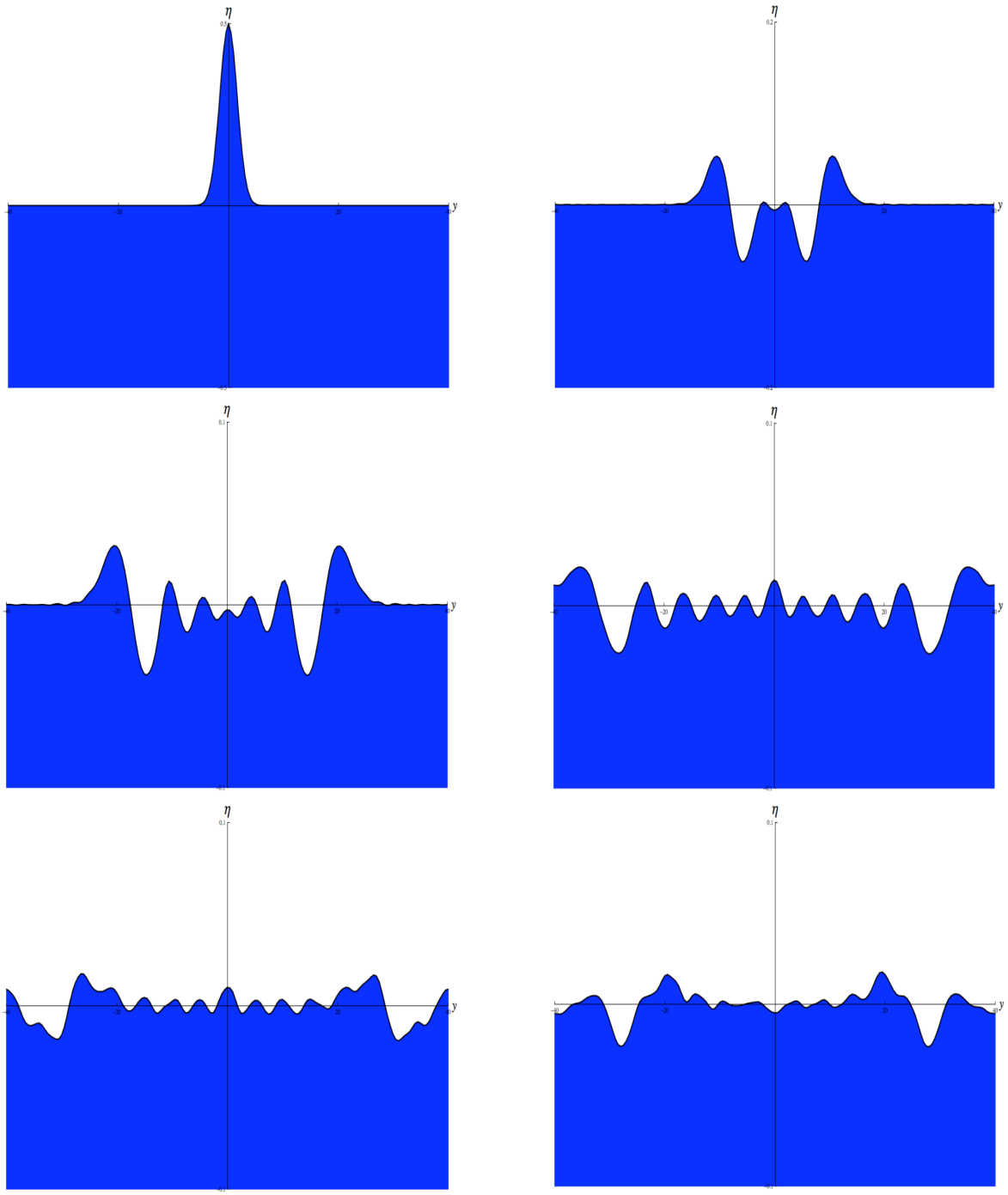


FIGURE III.12 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système KdV-KdV de Boussinesq où $a = c = 1/6$ et $b = d = 0$ pour les différents temps $t = \{0, 10, 20, 35, 55, 60\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/KdV_KdV_Gaussian_Cut_x_0.avi.

**Réflexion d'une onde solitaire sur un mur pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$.**

La Figure III.13 représente la propagation d'une onde solitaire approximative

$$\eta_{h0} = As \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+5)\right);$$

où l'amplitude du soliton est $As = .1$ et sa vitesse est $cs = 1 + As/2$ avec

$$u_{h0}(x,y) = As \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+5)\right) - \frac{1}{4}As^2 \cdot \operatorname{sech}^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+5)\right); v_{h0}(x,y) = 0,$$

pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$. Dans cet exemple, on travaille dans le domaine $\Omega = ]-20, 20[\times]-1, 1[$, le pas de temps est $\Delta t = .01$ et le pas d'espace $\Delta x = .2$ avec des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$ et des conditions aux bords réflexives sur $x = -20$ et $x = 20$ et des conditions aux bords de type Neumann homogènes pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ sur $y = -1$ et $y = 1$. On présentera dans la Figure III.14, la coupe transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $x$ où $y = 0$.

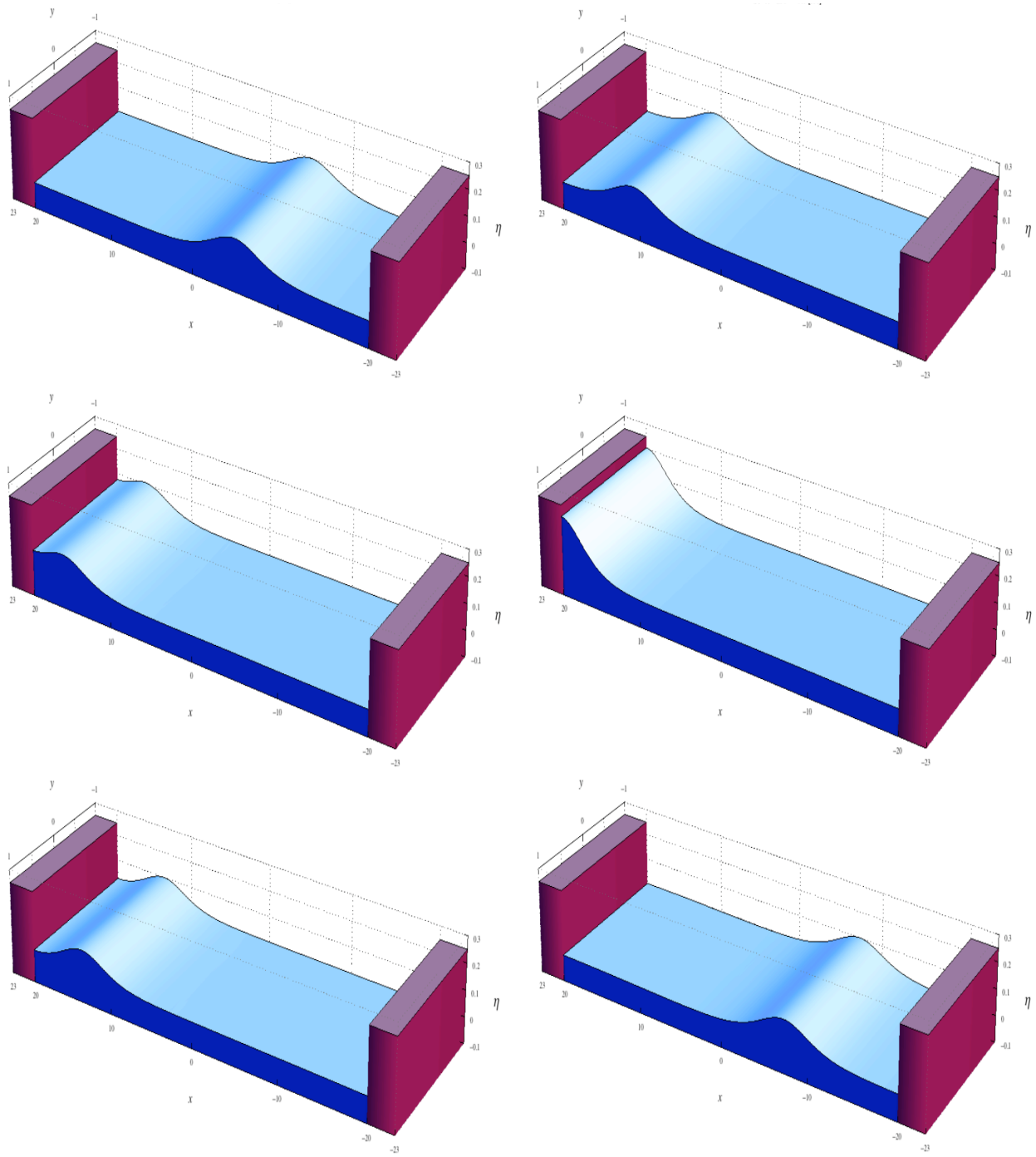


FIGURE III.13 – Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 24, 30, 50\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Soliton.avi.

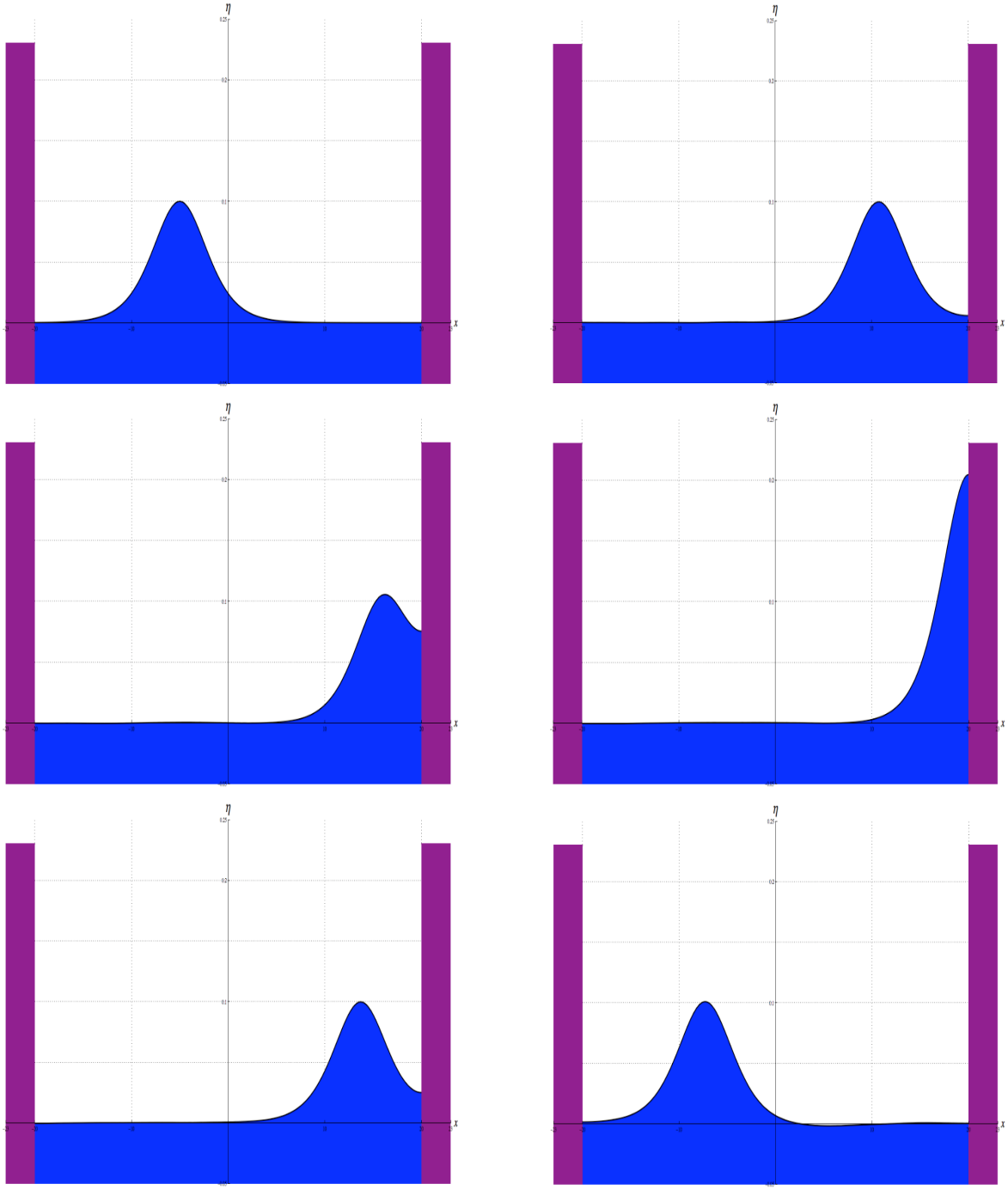


FIGURE III.14 – Coupe en $(y = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 24, 30, 50\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_Soliton_cut.avi.

**Propagation d'une onde solitaire à travers un port pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$.**

La Figure III.15 représente la propagation d'une onde solitaire approximative

$$\eta_{h0} = As \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+30)\right);$$

où l'amplitude du soliton est $As = .1$ et sa vitesse est $cs = 1 + As/2$ avec

$$u_{h0}(x,y) = As \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+5)\right) - \frac{1}{4}As^2 \cdot \operatorname{sech}^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+5)\right); v_{h0}(x,y) = 0,$$

pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$. Dans cet exemple, on travaille dans le domaine rectangulaire $\Omega = ]-60, 50[\times]-15, 15[$, le pas de temps est $\Delta t = .1$ et le pas d'espace $\Delta x = .2$ avec des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$ et des conditions aux bords réflexives où on a un mur (cf. Figure III.15) et des conditions aux bords de type Neumann homogènes pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ ailleurs.

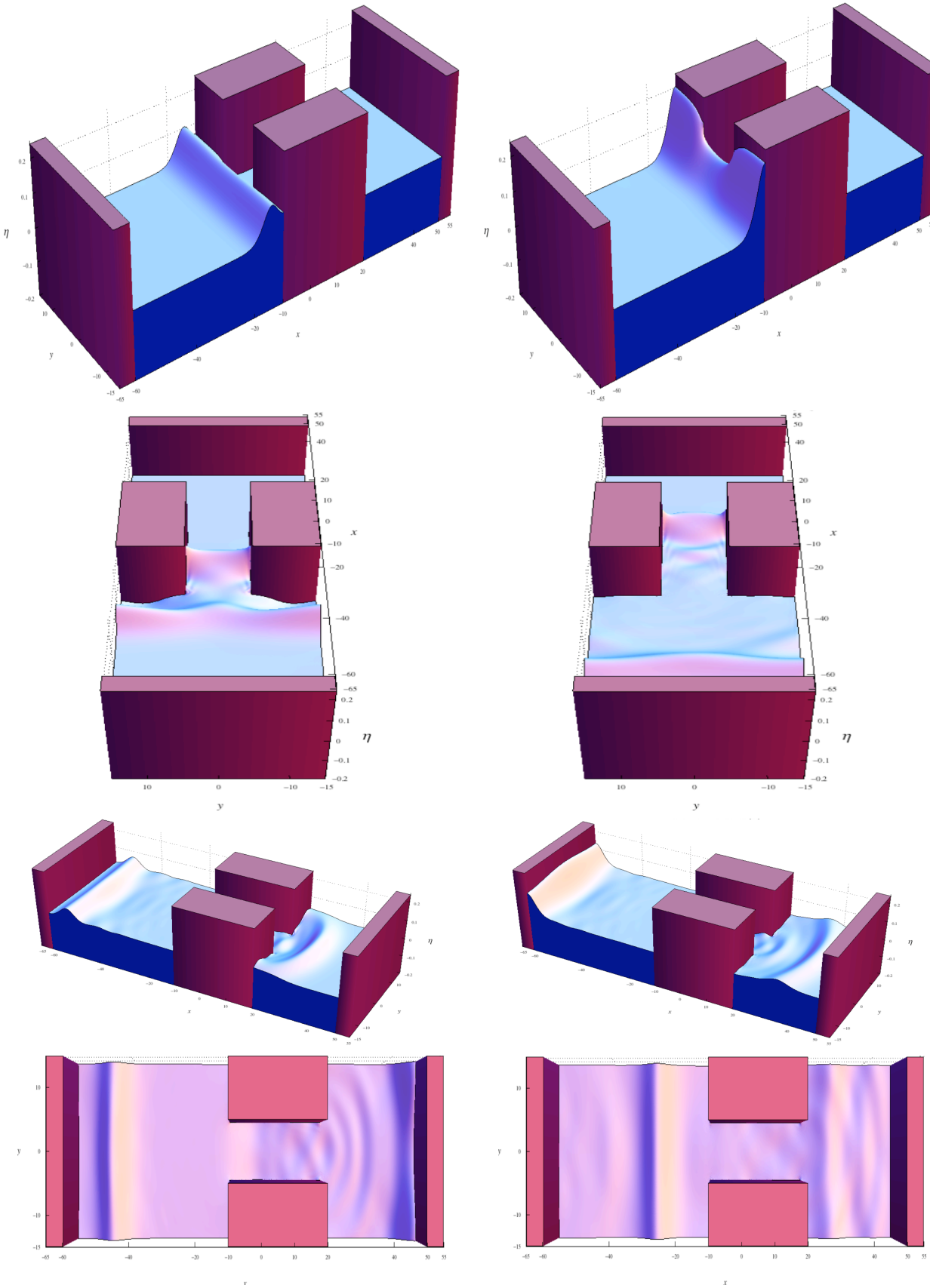


FIGURE III.15 – Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à travers un port pour les différents temps $t = \{15, 19, 30, 49, 60, 68, 80, 100\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_HARBOR_Soliton.avi.

## III.2 Résolution du système de Boussinesq sur un fond variable en espace

On rappelle les systèmes de Boussinesq avec un fond variable $D(x,y)$ :

$$\eta_t+\nabla\cdot((D+\eta)V)+\nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V\right)+\nabla D\nabla\cdot V\right]+aD^2\nabla\left(\nabla\cdot(DV)\right)-bD^2\nabla\eta_t\right\}=0 \tag{III.20}$$

$$V_t+\nabla\eta+\frac{1}{2}\nabla|V|^2+CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t\right)+\nabla D\nabla\cdot V_t\right]+cD^2\Delta\nabla\eta-dD^2\Delta V_t=0. \tag{III.21}$$

On montrera dans cette partie des exemples académiques du système de Boussinesq à fond variable, où $B=C=0$, on s'intéressera, dans ces cas, au comportement des énergies potentielles, cinétiques et totales obtenues par Dias et Dutykh [DiaDut09]

$$E_c=\frac{1}{2}\rho\int_\Omega\left(\int_{-D(x,y)}^{\eta}|V|^2\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E_p=\frac{1}{2}\rho\cdot g\int_\Omega\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E_t=E_c+E_p$$

où $\rho$ est la masse volumique de l'eau, $g$ est la force de gravité.

On va comparer, au premier temps et dans un même domaine $\Omega=]-40,40[\times]-1,1[$, ces énergies avec plusieurs types de fonds académiques :

- fond "plat" : $D(x,y)=1$,
- fond "marche" : $D(x,y)=\frac{1}{4}\left(\tanh(x)-3\right)$,
- fond "bosse" : $D(x,y)=1-.5\cdot e^{-x^2/10}$,
- fond "multi bosse" : $D(x,y)=-0.8-b_0\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{\ell}x\right)$ où $\ell=\frac{1+\varepsilon\alpha}{4}$, $\alpha=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $b_0=0.2$.

Pour la comparaison, on travaille sur le même domaine $[-40,40]\times[-1,1]$ et on part des mêmes données initiales :

$$\eta_{h0}=As\cdot\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right);$$

où l'amplitude du soliton est $As=.1$ et sa vitesse est $cs=1+As/2$ avec

$$u_{h0}(x,y)=As\cdot\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right)-\frac{1}{4}As^2\cdot\mathrm{sech}^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right);v_{h0}(x,y)=0,$$

le même pas de temps est $\Delta t=.01$ et le même pas d'espace $\Delta x=.3$ avec des éléments finis de type $\mathbb{P}_2$ et des conditions aux bords réflexives sur $x=-40$ et $x=40$ et des conditions

aux bords de type Neumann homogènes pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ sur $y = -1$ et $y = 1$.

En effet, dans le cas de système de Boussinesq à fond variable, on a seulement la conservation de la masse, mais pas celle de la norme $L^2$ (cf. Figure III.16) ni celle de l'énergie (cf. Figure III.19).

De plus, on remarque premièrement que dans le cas d'un fond plat, on a la conservation de l'énergie tandis que dans le cas d'une marche on constate son influence sur la croissance de l'énergie potentielle et finalement dans le cas d'une simple bosse ("bump") l'énergie décroît alors que dans le multi bosse, elle varie peu.

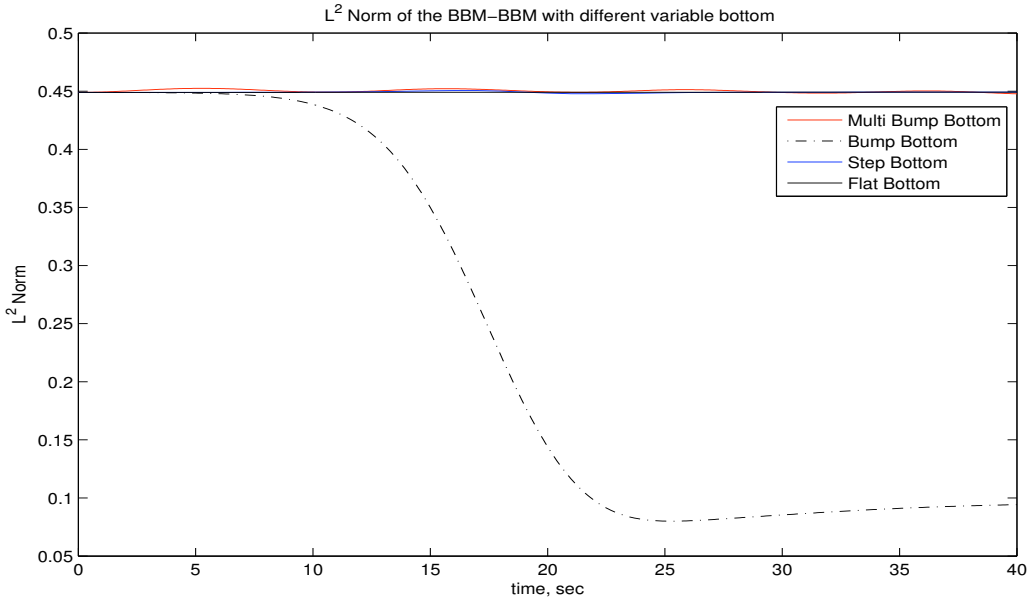



FIGURE III.16 – Norme $L^2$ de la solution avec différents types de fonds.

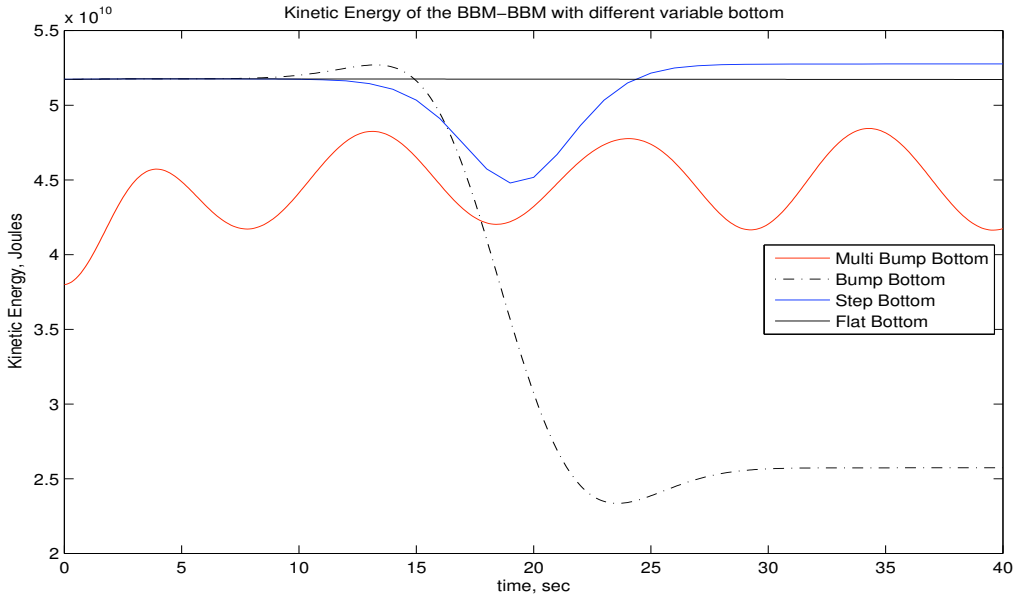



FIGURE III.17 – Energie cinétique avec différents types de fonds.

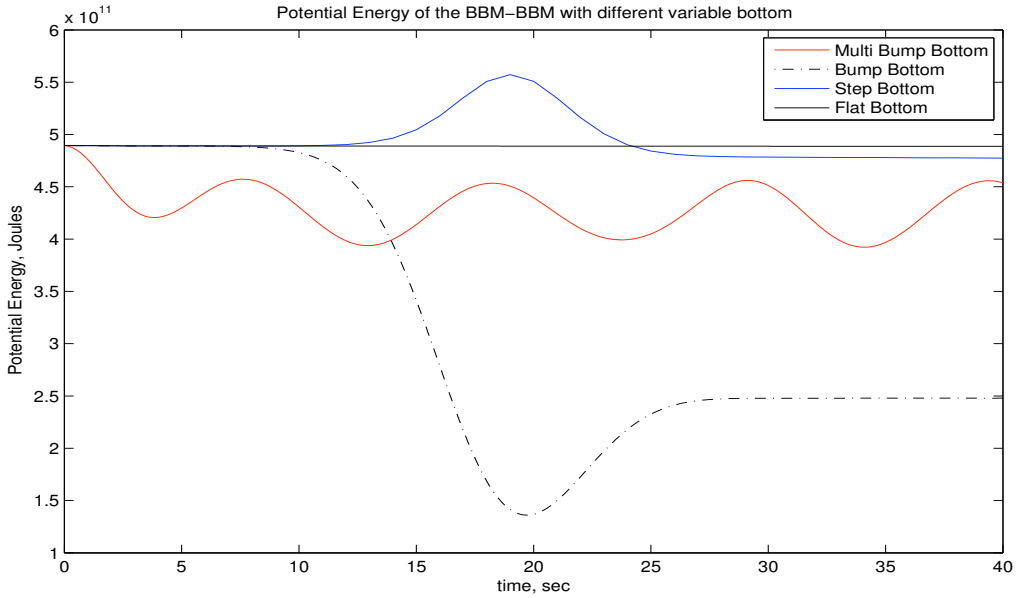



FIGURE III.18 – Energie potentielle avec différents types de fonds.

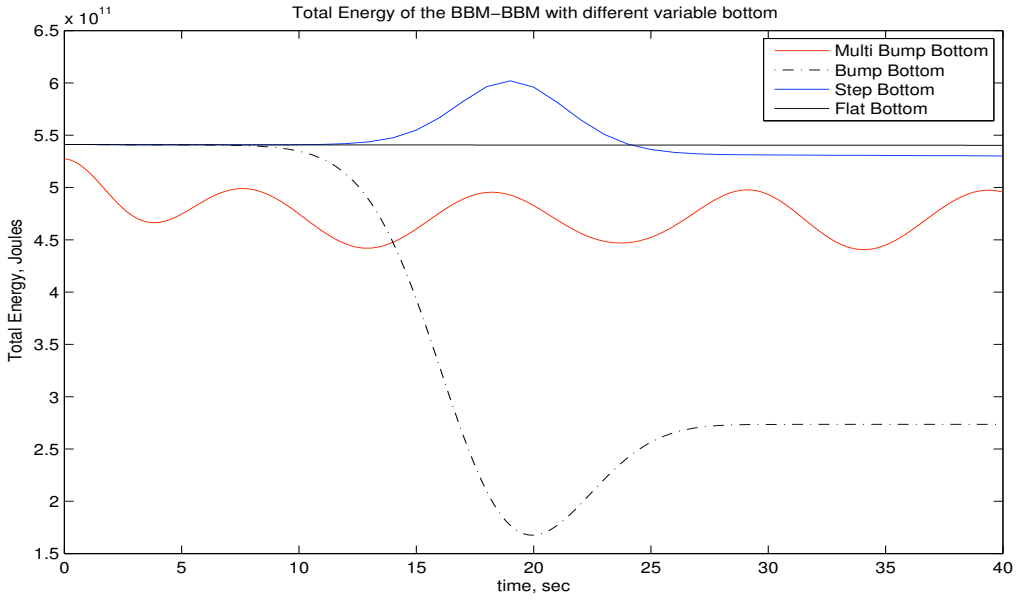



FIGURE III.19 – Energie totale avec différents types de fonds.

Dans la Figure III.21, on montre la propagation d'une onde solitaire approximative

$$\eta_{h0} = As \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right);$$

où l'amplitude du soliton est $As = .1$ et sa vitesse est $cs = 1 + As/2$ avec

$$u_{h0}(x,y) = As\cdot\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right) - \frac{1}{4}As^2\cdot\operatorname{sech}^4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3As}{cs}}(x+20)\right); v_{h0}(x,y) = 0,$$

pour le système {(III.20),(III.21)} dans le cas où $B = C = 0, a = c = 0$ et $b = d = 1/6$.

Dans cet exemple, on travaille dans le domaine $\Omega = ]-40, 40[\times]-1, 1[$ où le fond est $-D(x,y) = \frac{1}{4}(\tanh(x) - 3)$ (cf. Figure III.20), le pas de temps est $\Delta t = .01$ et le pas d'espace $\Delta x = .3$ avec des éléments finis de type $\mathbb{P}_2$ et des conditions aux bords réflexives sur $x = -40$ et $x = 40$ et des conditions aux bords de type Neumann homogènes pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ sur $y = -1$ et $y = 1$. On présentera dans la Figure III.22, la coupe transversale du profil de $\eta_h$ dans la direction des $x$ où $y = 0$.

D'autre part, on remarque dans la Figure III.22, l'influence de la bathymétrie sur l'onde solitaire ; où, après interaction de l'onde avec la marche, on a la génération d'une onde qui ressemble à un soliton et qui se propage dans le sens inverse, tandis que la longueur d'onde de la vague diminue et son amplitude augmente.

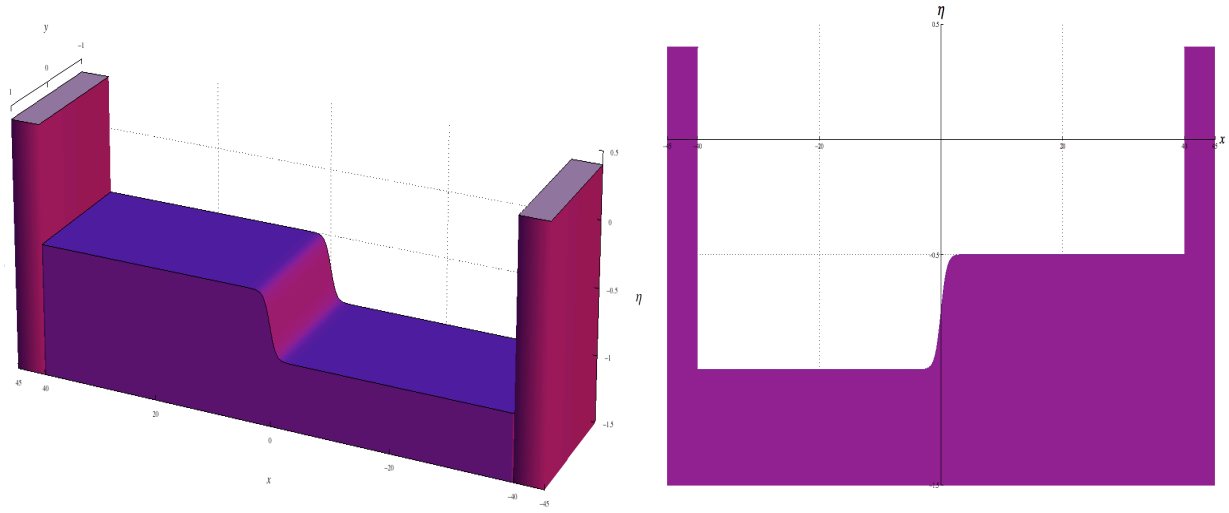



FIGURE III.20 – A gauche, le fond du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ et à droite sa coupe transversalle par rapport à $y = 0$.

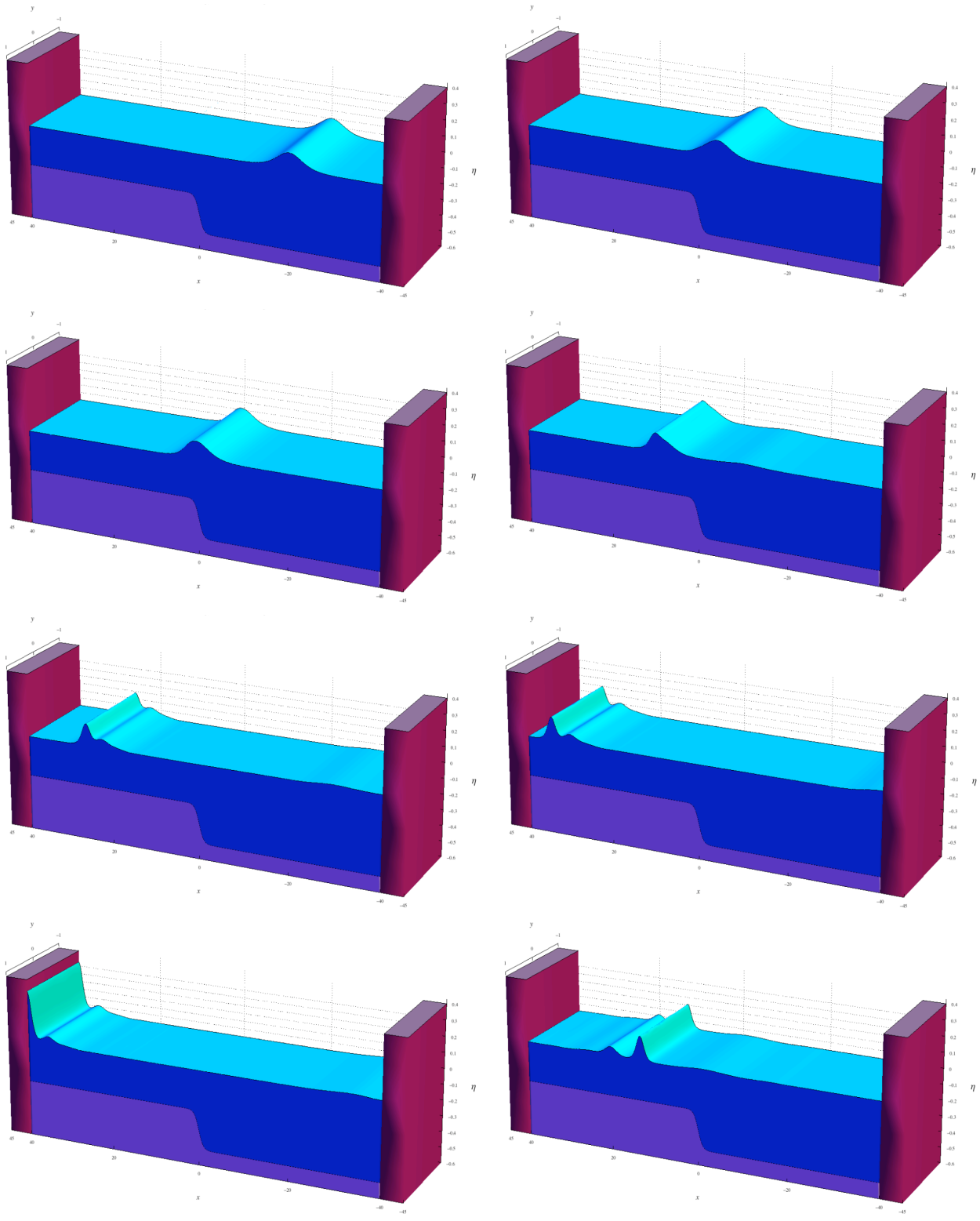


FIGURE III.21 – Solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60, 67, 100\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton.avi.

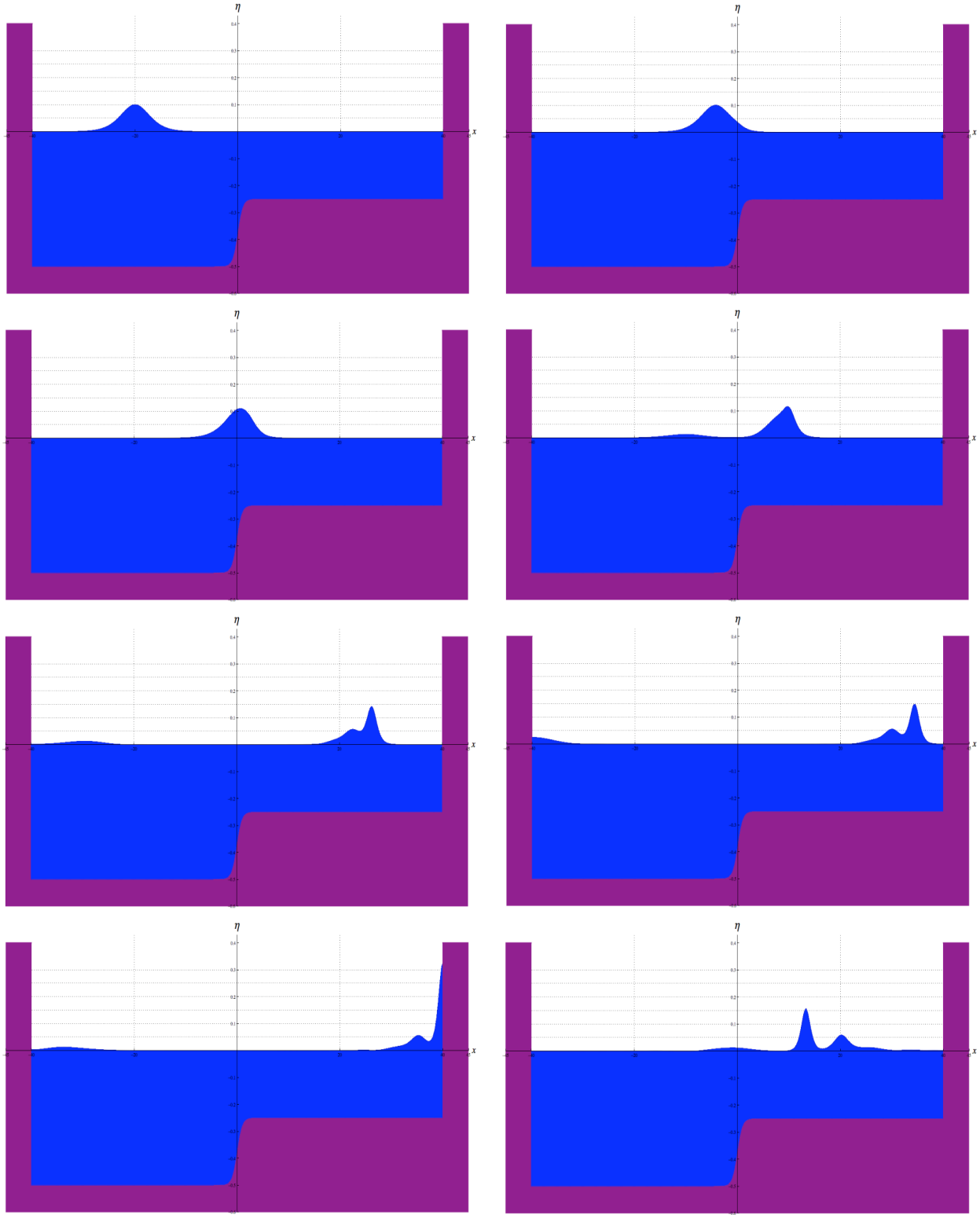


FIGURE III.22 – Coupe en $(y = 0)$ de la solution du système BBM-BBM à fond variable où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ pour les différents temps $t = \{0, 15, 20, 30, 50, 60, 67, 100\}$. Pour la clarté, le fond est divisé par 2.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_VB_Soliton_Cut_y_0.avi.

## III.3 Résolution du système de Boussinesq sur un fond dynamique

On rappelle les systèmes de Boussinesq avec un fond dynamique $h(x,y,t) = D(x,y) - \zeta(x,y,t)$ :

$$\eta_t + \nabla\cdot(DV) + \nabla\cdot(\eta V) + \nabla\cdot(\zeta V) + \zeta_t + A\nabla\cdot(D^2\nabla\zeta_t)$$
$$+ \nabla\cdot\left\{BD^2\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V\right) + \nabla D\nabla\cdot V\right] + aD^2\nabla\left(\nabla\cdot(DV)\right) - bD^2\nabla\eta_t\right\} = 0 \qquad \text{(III.22)}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 + CD\left[\nabla\left(\nabla D\cdot V_t\right) + \nabla D\nabla\cdot V_t\right] + cD^2\Delta\nabla\eta - dD^2\Delta V_t + CD\nabla\zeta_{tt} = 0. \qquad \text{(III.23)}$$

Dans un premier exemple, on considère le système simplifié de Boussinesq à fond dynamique où $A = 0, a = 0, B = 0, b = 1/6, C = 0, c = 0, D = .5, d = 1/6$ et le fond :

$$DB1 : \qquad h(x,y,t) = D(x,y) - \zeta(x,y,t) = .5 + .1e^{-(x^2+y^2)/25}\sin(t/2)$$

$$\eta_t + \nabla\cdot(DV) + \nabla\cdot(\eta V) + \nabla\cdot(\zeta V) + \zeta_t - b\nabla\cdot\left(D^2\nabla\eta_t\right) = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

$$V_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\nabla|V|^2 - dD^2\Delta V_t = 0. \qquad \text{(III.25)}$$

Pour cet exemple, on part d'une donnée initiale nulle et à vitesse nulle

$$\eta_{h0} = u_{h0} = v_{h0} = 0$$

et on fixe le fond à partir d'un temps $t = 3s$ où la fonction $\zeta$ atteins son maximum et on regarde la propagation de l'onde générée par le fond $\zeta$ dans le domaine $\Omega = ]-40, 40[\times]-40, 40[$, on a pris comme pas de temps $\Delta t = .1$ et comme pas d'espace $\Delta x = .5$ avec des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$ et des conditions aux bords bi-périodiques sur tout le long du bord (voir Figures III.25,III.26).

Dans ce cas, on présente la variation des énergies potentielles, cinétiques et totales dans la Figure III.23 et le maximum de la solution à $t = 100s$ dans la Figure III.24.

On remarque ici, que le déplacement du fond influe sur la croissance de l'énergie potentielle qui est nulle au début puisque qu'on part de l'équilibre et après la stabilisation du fond on remarque l'énergie potentielle reste à peu près constante.

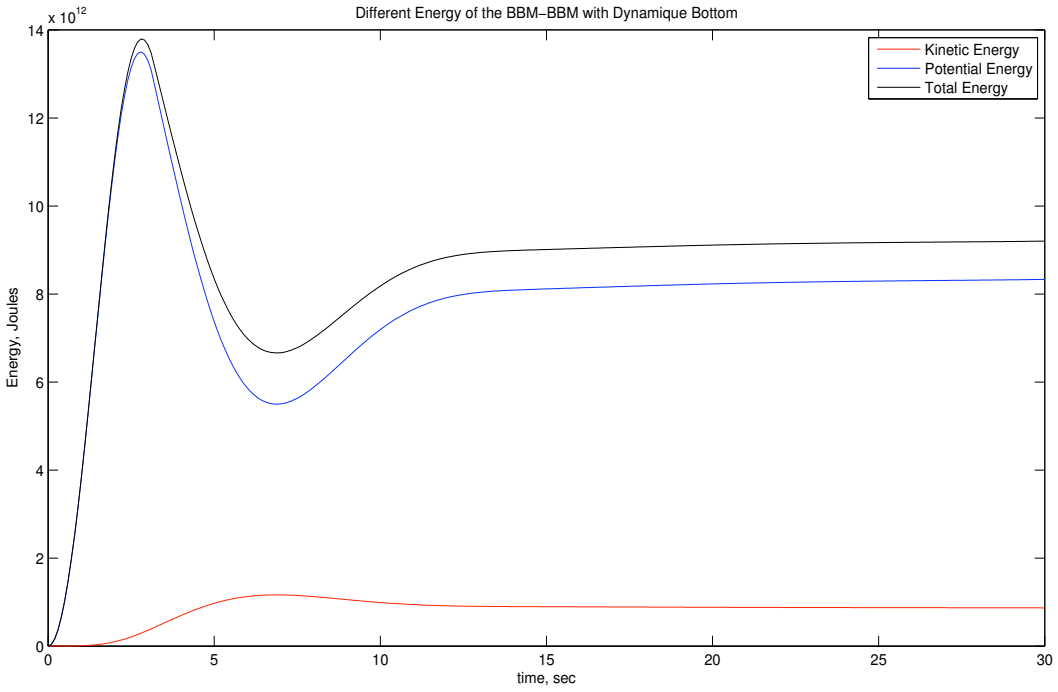



FIGURE III.23 – Energie cinétique, potentielle et totale pour le fond dynamique $DB1$.

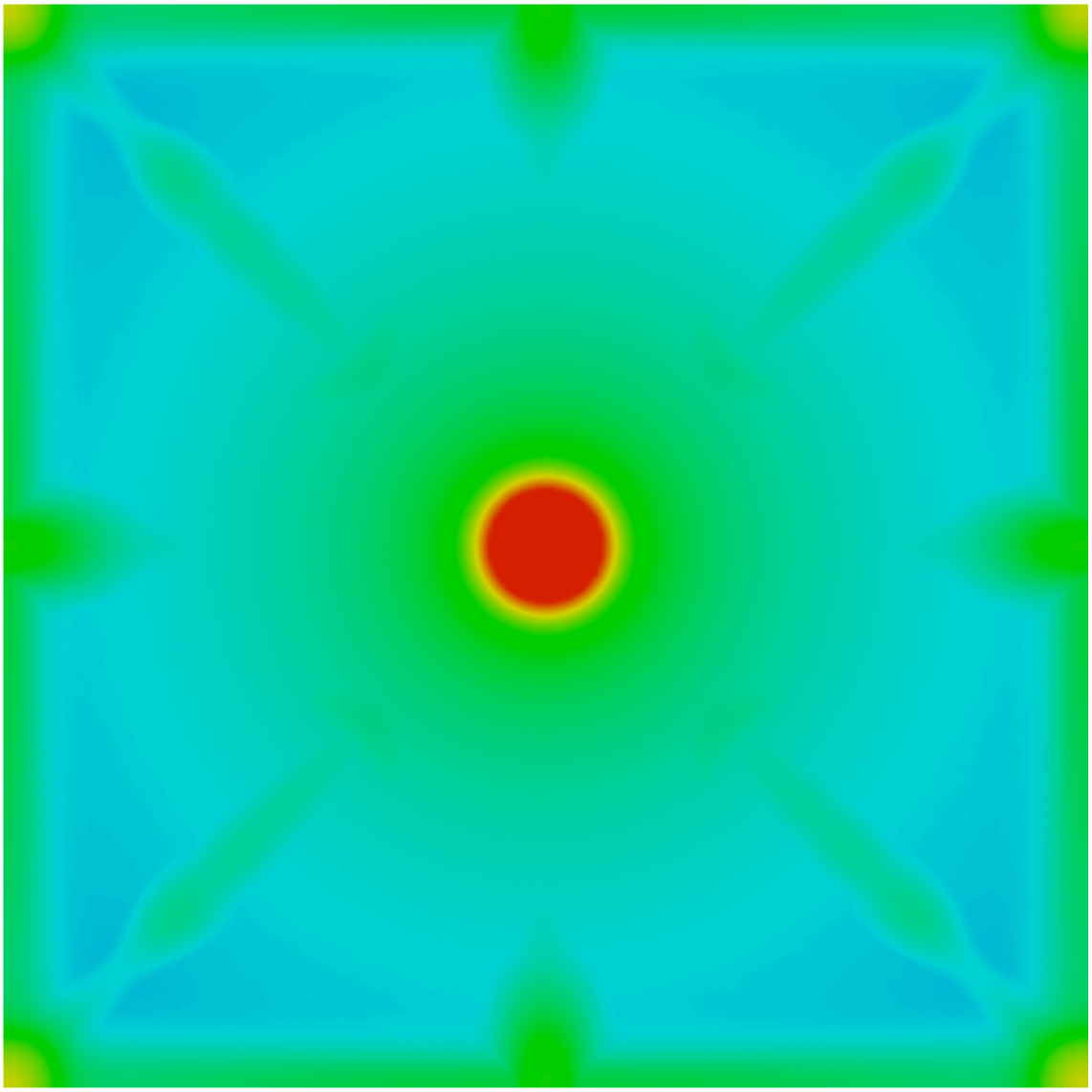


FIGURE III.24 – Maximum de la solution à $t = 100s$.

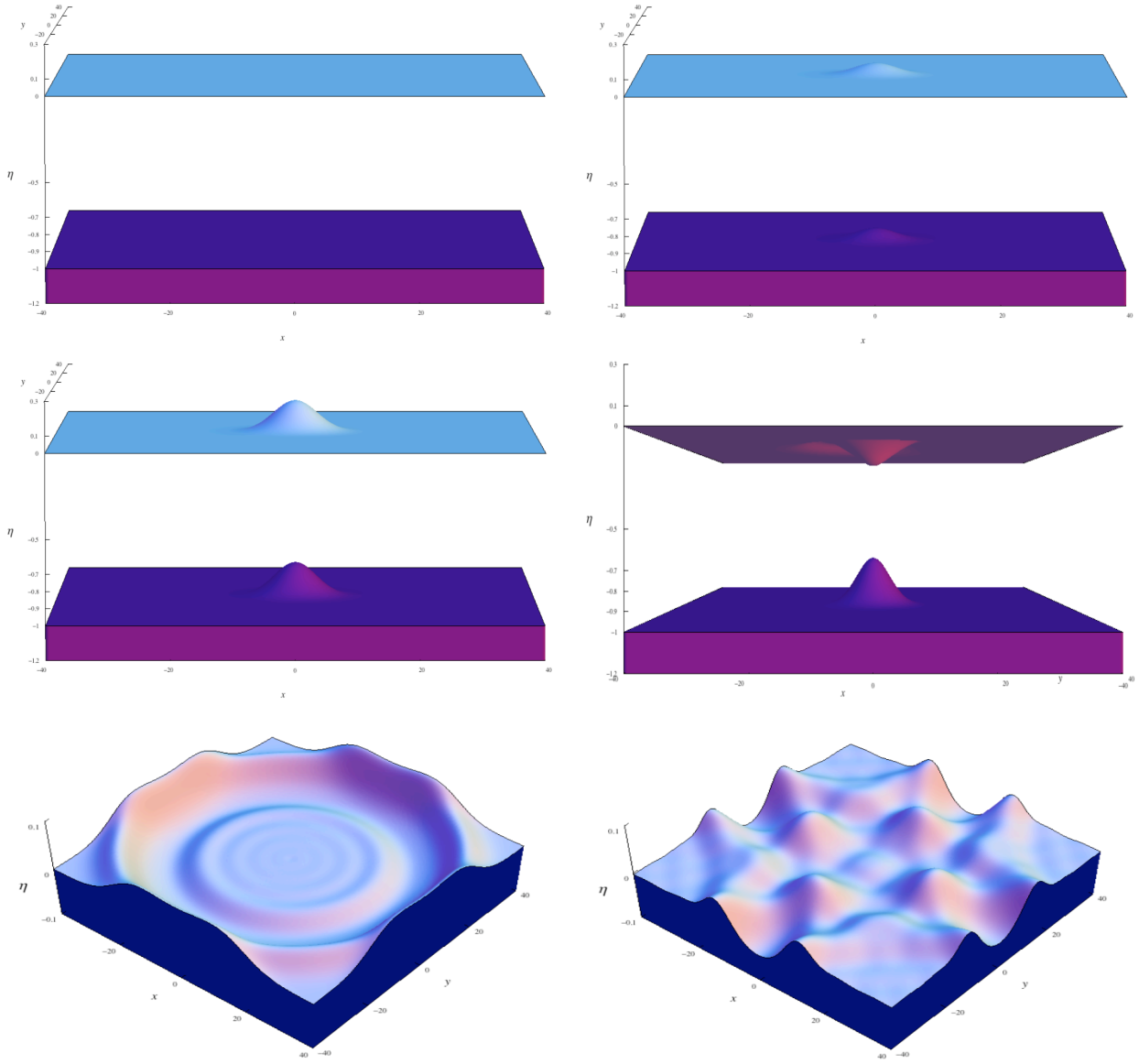


FIGURE III.25 – Solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique, pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5, 10, 40, 100\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_PBC.avi.

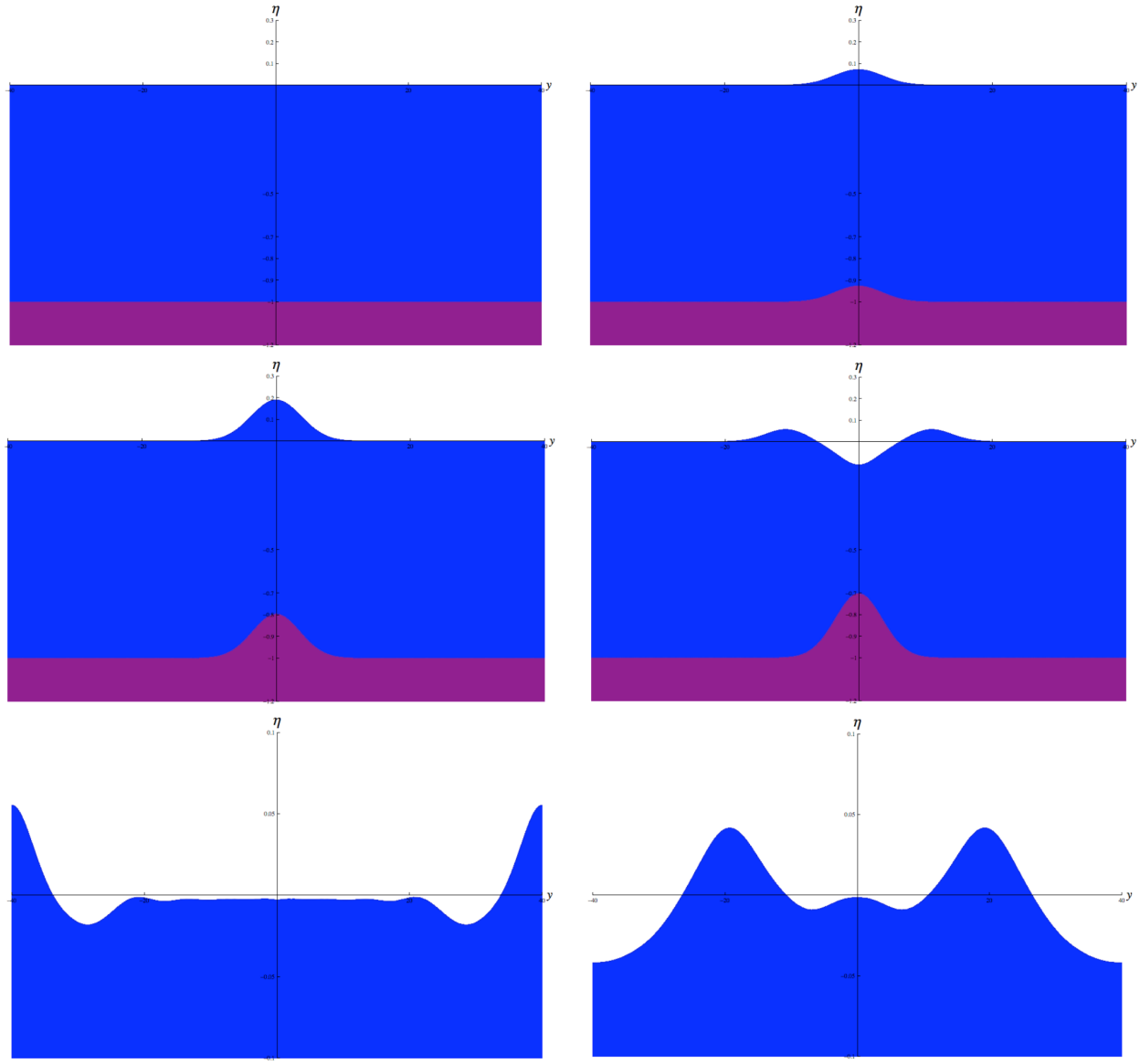


FIGURE III.26 – Coupe en $(x = 0)$ de la solution du système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$ à fond dynamique, pour les différents temps $t = \{0, .5, 1.5, 10, 40, 100\}$. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/BBM_BBM_DB_Cut_x_0_PBC.avi.

## III.4 Résolution du système de Boussinesq avec des données réalistes

Dans cette section, on montrera l'utilité de FreeFem++ pour le système de Boussinesq en construisant un domaine, d'une part à travers une photo prise sur Google Earth® et d'autre part à travers la bathymétrie xyz téléchargée du site http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd_designagrid.html.

**Propagation d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour le système BBM-BBM où $a = c = 0$ et $b = d = 1/6$.**

A partir de Google Earth®, on peut télécharger des photos de la terre des zones qui nous intéressent. Dans cette section, on choisira des photos de la mer Méditerranée. La Méditerranée étant très vaste, pour avoir une meilleure résolution, on prendra des photos de plusieurs parties (cf. Figure III.27) qu'on assemblera par la suite en utilisant Photoshop® de sorte à obtenir une photo complète de la Méditerranée (cf. Figure III.28).

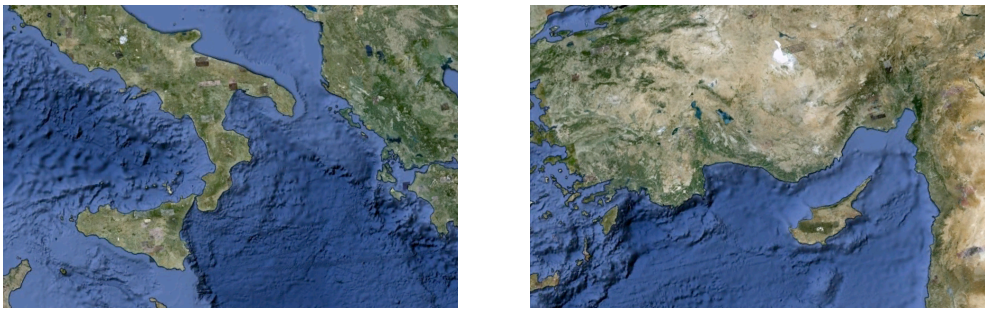


FIGURE III.27 – Les photos des deux parties de la mer Méditerranée.

FIGURE III.28 – La mer Méditerranée après assemblage avec Photoshop®.

En utilisant aussi Photoshop®, on peut éliminer les zones sèches qui contournent la Méditerranée (cf. Figure III.29).

FIGURE III.29 – La mer Méditerranée.

En convertissant l'image obtenue en format .pgm (lu par FreeFem++), on obtiendra la Figure III.30.

FIGURE III.30 – La mer Méditerranée en format .pgm.

Afin de générer le maillage de la mer Méditerranée, on utilisera un code de FreeFem++ fait par Frédéric Hecht qui peut être téléchargé à partir du lien http://www.freefem.org/ff2a3/Stic-FF2A3-2010/edp/Chesapeake/Chesapeake-mesh.edp.

FIGURE III.31 – Le maillage généré par FreeFem++ pour la mer Méditerranée.

On présente dans les Figures III.32 et III.33, la propagation d'une onde, qui ressemble à celle d'un *Tsunami* générée par un tremblement de terre, dans la Méditerranée sous le système BBM-BBM avec un fond plat $D = 1$ et les données initiales suivantes :

$$\eta_{h0} = 0.1 \cdot \left( 1 - 1/(1 + 10^3 \cdot e^{\left( -(\frac{-70+(y-PY)-0.2\cdot(x-PX)}{10})^2 - (\frac{-13\cdot 10^4+0.2\cdot(y-PY)+(x-PX)\cdot 10^3}{10^{(7/2)}})^2 \right)} \right),$$

$$u_{h0}(x, y) = v_{h0}(x, y) = 0.$$

Ici $PX = 2270, PY = 500$, le pas de temps est $\Delta t = 0.1$. On utilise des éléments finis de type $\mathbb{P}_2$ pour une meilleure résolution ainsi qu'une méthode d'adaptation de maillage intégrée à FreeFem++. A cause des problèmes du non lissage des bords, on a rencontré des difficultés avec la génération du maillage dans certains endroits après $t = 400sec$. Par contre cette méthode donne des résultats comparables avec des éléments $\mathbb{P}_1$ sans adaptation de maillage, où dans ce dernier cas on n'a plus de problème de génération de maillage ; on est en revanche obligé de raffiner plus ce qui rend le calcul très lourd.
Dans la Figure III.34, on représente le maximum de la propagation de la solution à $t = 1000sec$, pour les mêmes données ci-dessus mais en utilisant des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$ et sans utiliser l'adaptation de maillage.

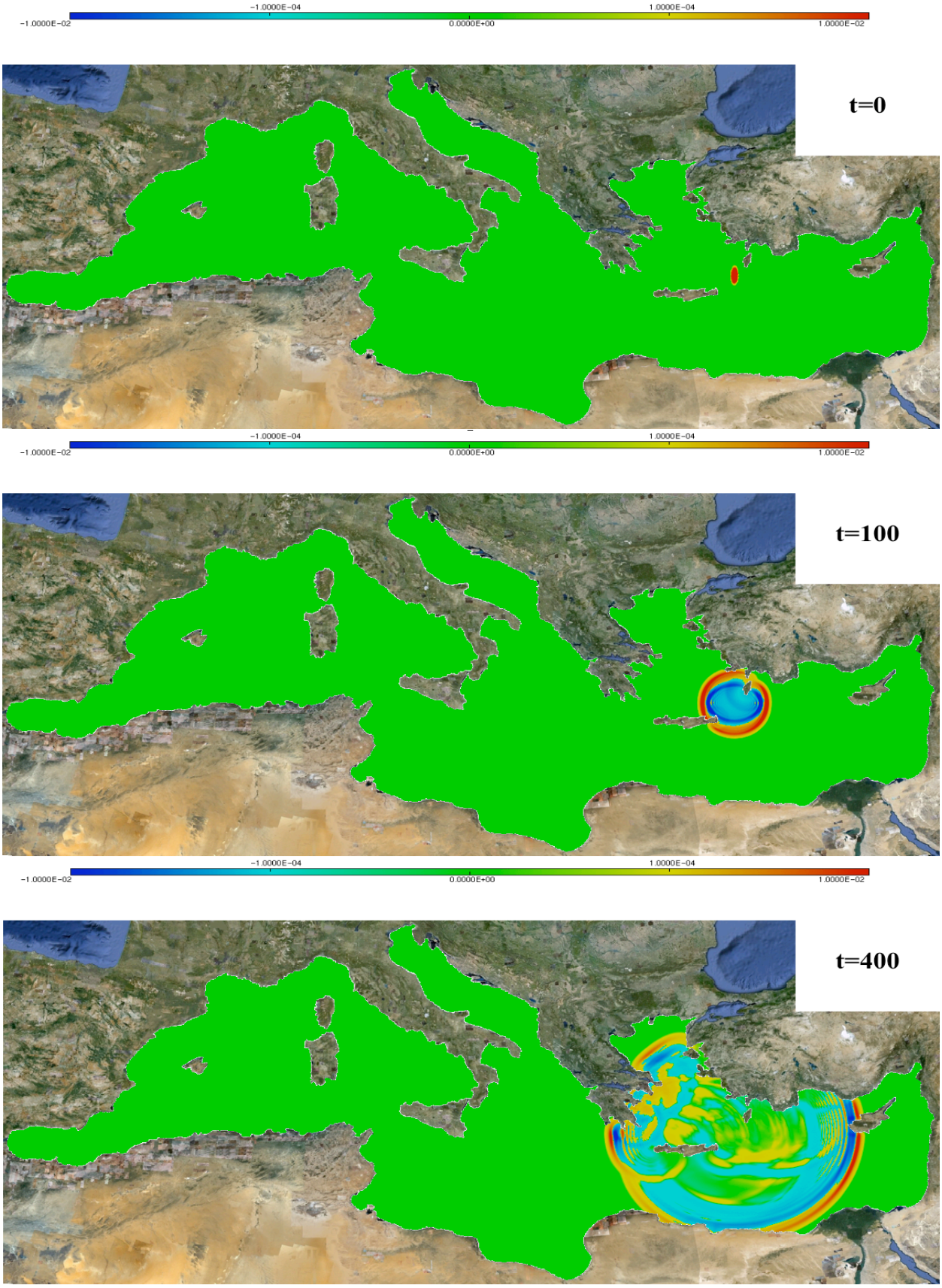



FIGURE III.32 – Propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = \{0, 100, 400\}$. Le *Tsunami* est généré au large de la Crête.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee.avi.

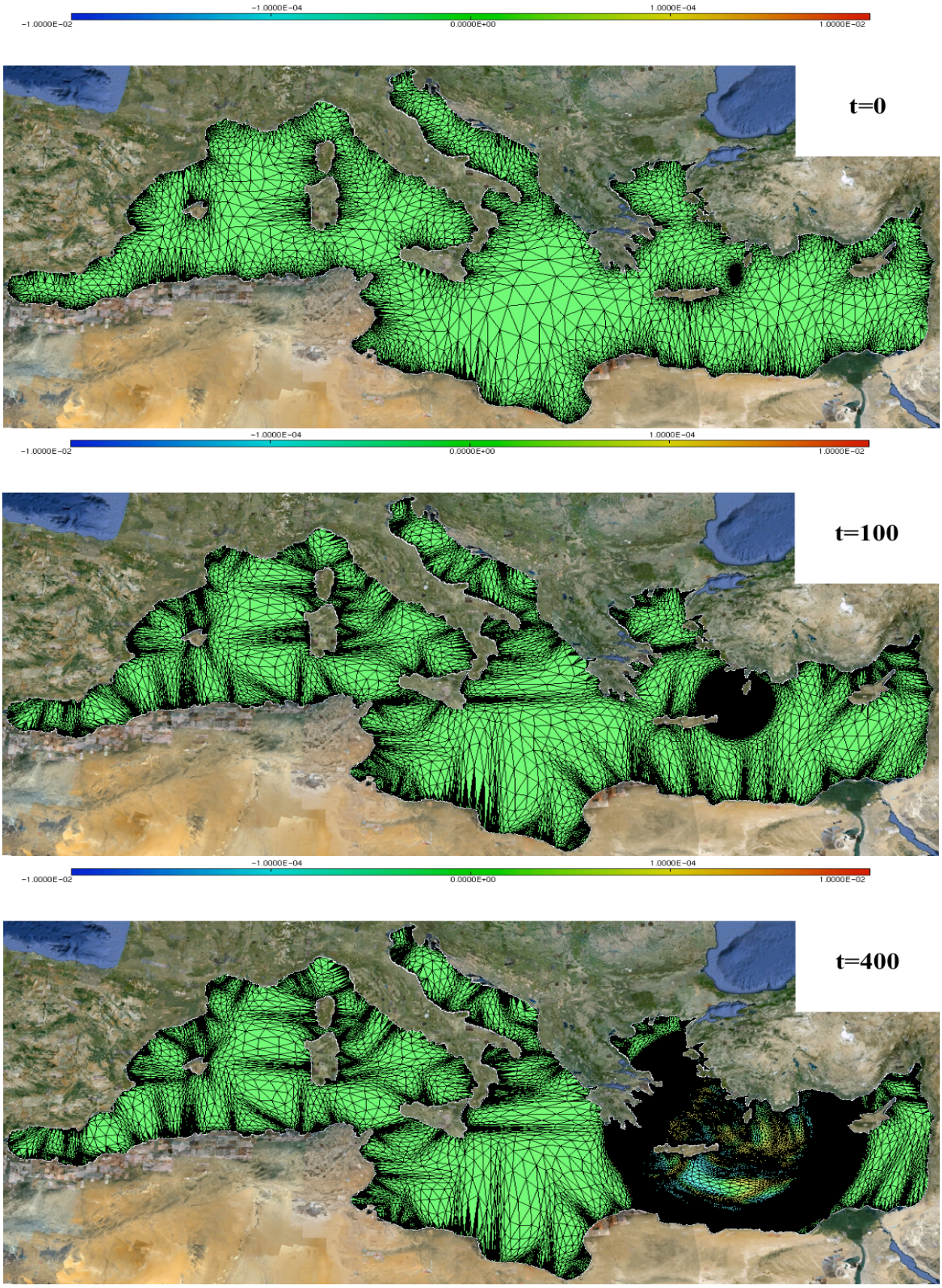



FIGURE III.33 – Propagation de la solution et du maillage d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = \{0, 100, 400\}$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_mesh.avi.

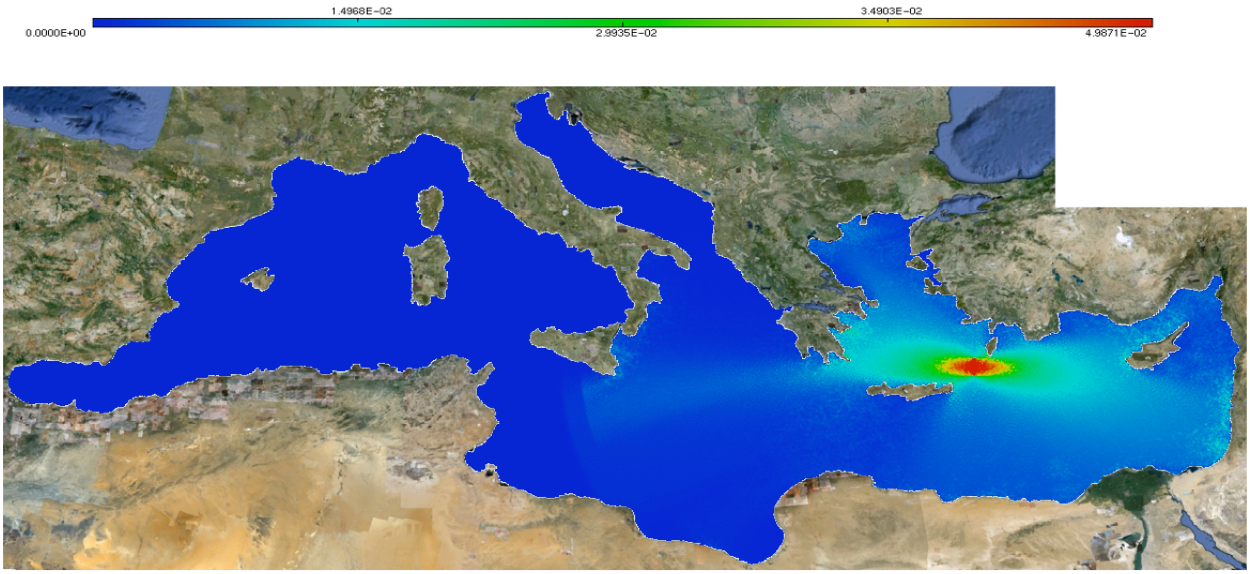



FIGURE III.34 – Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 1000sec$. Vidéo disponible sur :
http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/tsunami_mediterranee_MAX_P1.avi.

**Propagation d'un *Tsunami* dans une partie de la Méditerranée avec des données de bathymétrie réelles**

La génération du maillage à travers une photo présente certaines difficultés, on constate notament un problème au bord du domaine (cf. Figure III.35), de plus nous sommes limités a des conditions aux limites de types Dirichlet homogène pour $\eta, u$ et $v$ (cf. Figure III.31).

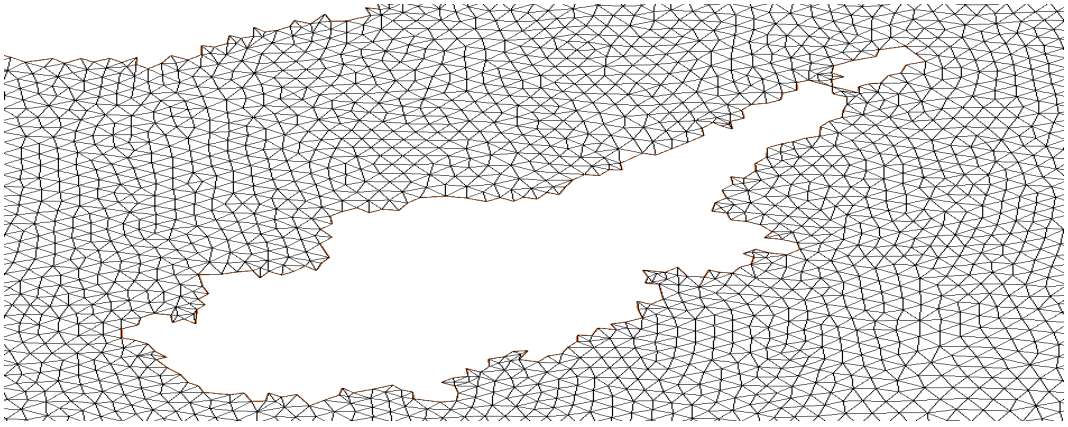


FIGURE III.35 – Le maillage autour de Chypre en utilisant le script de Frédéric Hecht.

Pour résoudre ce problème, Olivier Pantz a proposé d'appliquer la méthode de level-set qui permettent de lisser le bord. Pour cela, il a écrit un script avec FreeFem++ qui permet,

à travers des données (xyz) de la bathymétrie d'une zone de la terre (téléchargées du site http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd_designagrid.html), de générer un maillage de la zone où l'amplitude est nulle tout en utilisant la méthode de level-set pour lisser le bord (cf. Figure III.36). De plus, on peut à travers ce script, d'une part utiliser la méthode de l'adaptation de maillage sans avoir des problèmes de génération de maillage (cf. Figure III.37) et d'autre part, avoir des labels différents pour chaque type de bord, ce qui facilite l'utilisation des différents types de conditions aux limites pour $\eta, u$ et $v$ (Neumann homogène en pleine mer et Dirichlet homogène sur les côtes).

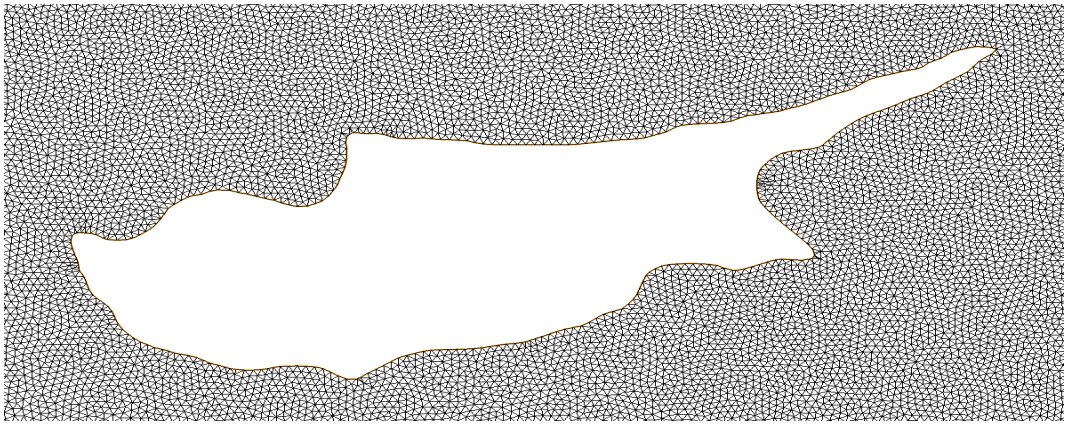


FIGURE III.36 – Le maillage autour de Chypre en utilisant le script d'Olivier Pantz.

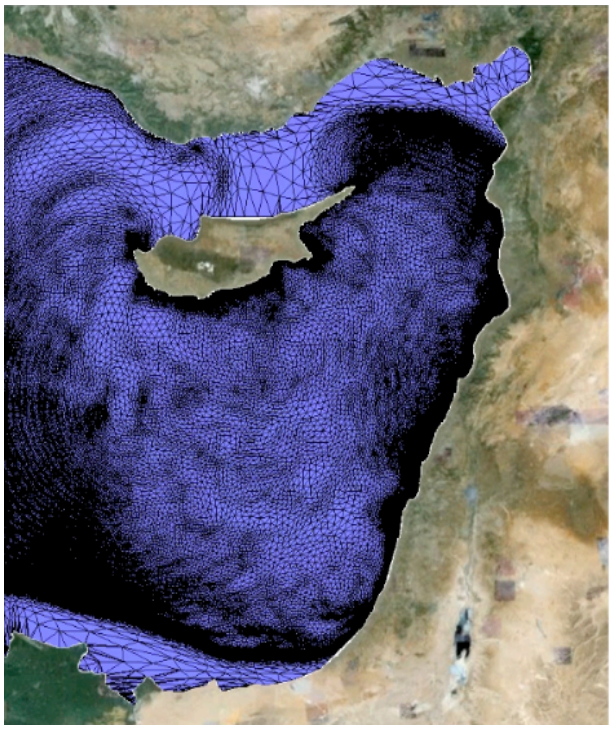


FIGURE III.37 – Adaptation de maillage autour de Chypre après le script d'Olivier Pantz. Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/chypre_adaptmesh.avi.

A l'aide de la fonction triangulate dans FreeFem++, on commence par lire les données xyz déjà téléchargées (cf. Figure III.38) ensuite on sépare la partie positive de la partie négative de la bathymétrie par une courbe qui sera à l'aide du script le bord de notre domaine, on utilisera la méthode de level-set pour lisser le bord (cf. Figure III.39).

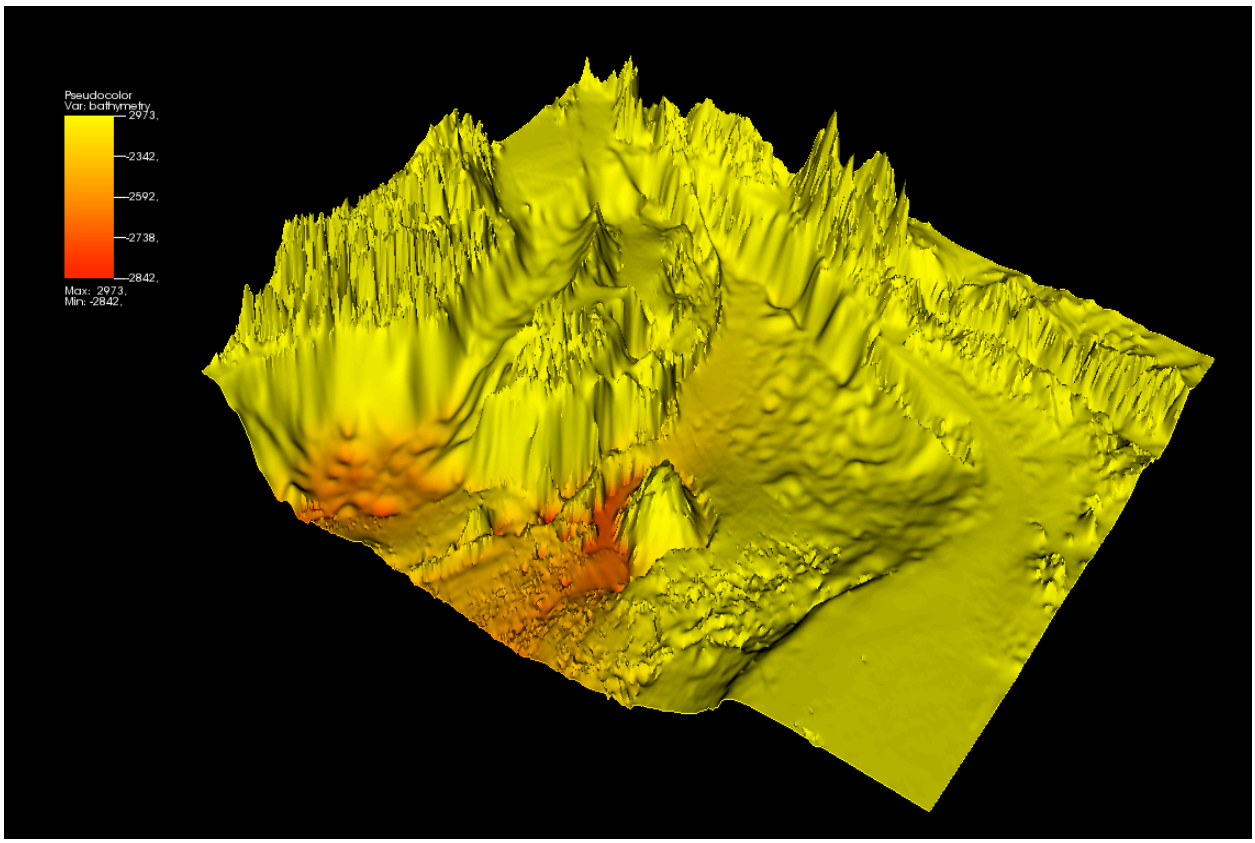



FIGURE III.38 – Bathymétrie téléchargée du site de NOAA, (min $= -2.842km$ et max $= 2.973km$).

FIGURE III.39 – Maillage généré à travers le script d'Olivier Pantz.

Le fond de notre domaine d'étude sera le même que celui déjà téléchargé, mais pour des raisons d'utilisation de la méthode des éléments finis et, comme notre étude dans toute cette thèse était sous la condition $\eta + \zeta > 0$, tous les points de la bathymétrie qui sont supérieurs ou fixés à $-10m$ seront égales à $-10m$ (cf. Figure III.40).
On remarque aussi que pour télécharger les données bathymétriques du site de NOAA, on doit connaître les degrés de latitude et de longitude de notre domaine ; pour cela en supposant que la terre est sphérique et que son rayon est celui de l'équateur $R = 6378,137km$ et en tenant compte que :

$$1\text{degré de latitude} = \pi \cdot R/180 = 111,263km,$$

$$\text{et } 1\text{degré de longitude} = \cos(1\text{degré de latitude} \cdot \pi/180) \cdot \pi \cdot R/180.$$

On limitera notre étude pour cet exemple en faisant une translation de notre domaine en considérant que 1 degré de latitude est égal à 1 degré de longitude est égal à $100km$. On utilisera des conditions aux limites de type Dirichlet homogène pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ pour les

bords où on a de la terre, et des conditions de type Neumann homogène pour $\eta_h$, $u_h$ et $v_h$ pour les frontières artificielles du domaine en pleine mer (partie gauche du domaine). On utilisera des éléments finis de type $\mathbb{P}_1$ et on part des données initiales suivantes :

$$\eta_{h0} = 0.01 \cdot e^{\left(-\left(\frac{x - 33.5 \cdot 100}{3}\right)^2 \left(\frac{y - 33.8 \cdot 100}{10}\right)^2\right)},$$

$$u_{h0}(x, y) = v_{h0}(x, y) = 0.$$

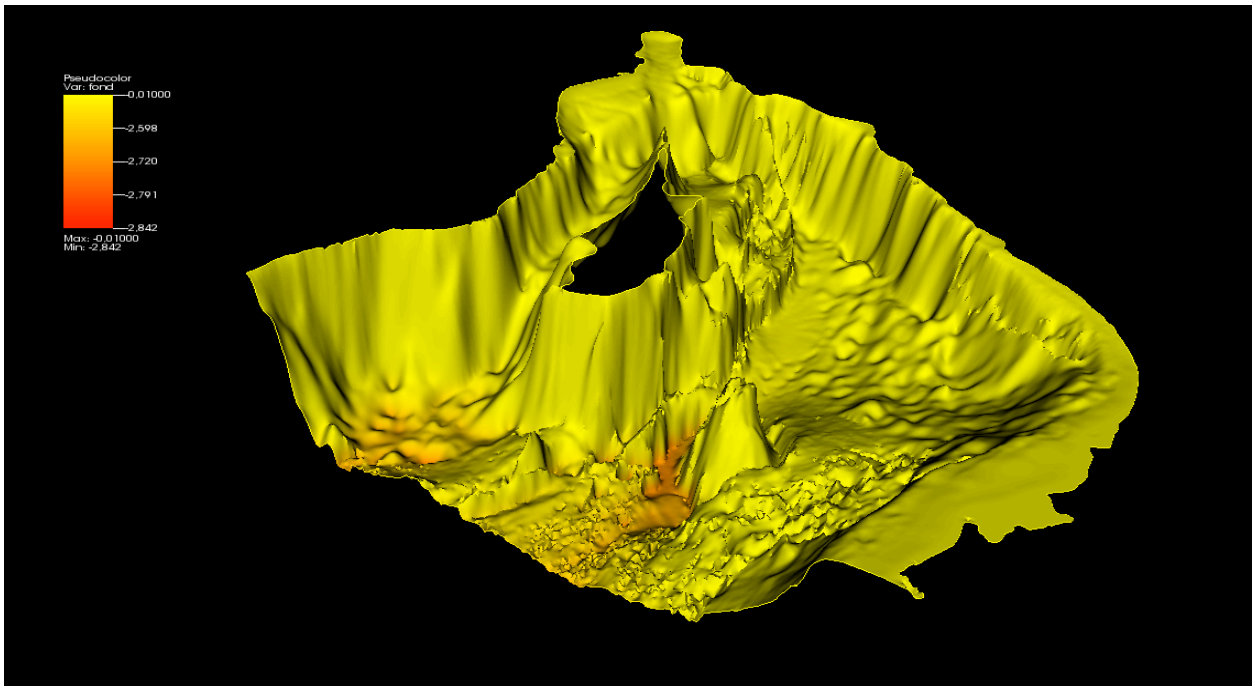



FIGURE III.40 – Le fond de la bathymétrie téléchargée du site de NOAA, (min $= -2.842km$ et max $= -0.01km$).

On présente dans les Figures III.41 à III.43 la propagation d'une onde générée au large de Chypre dans la Méditerranée qui ressemble à celle générée à partir d'un séisme. On présentera dans la Figure III.44 le maximum de la propagation de la solution pour $t = 230sec$.

Cette simulation n'est qu'un premier pas dans ce domaine, on a rencontré des problèmes avec les conditions aux bords, d'une part en plein mer où les conditions de type Neumann homogène provoquent l'explosion de la solution, et d'autre part dans les endroits ; où on a de la terre ; on est limités à des conditions de type Dirichlet homogène.

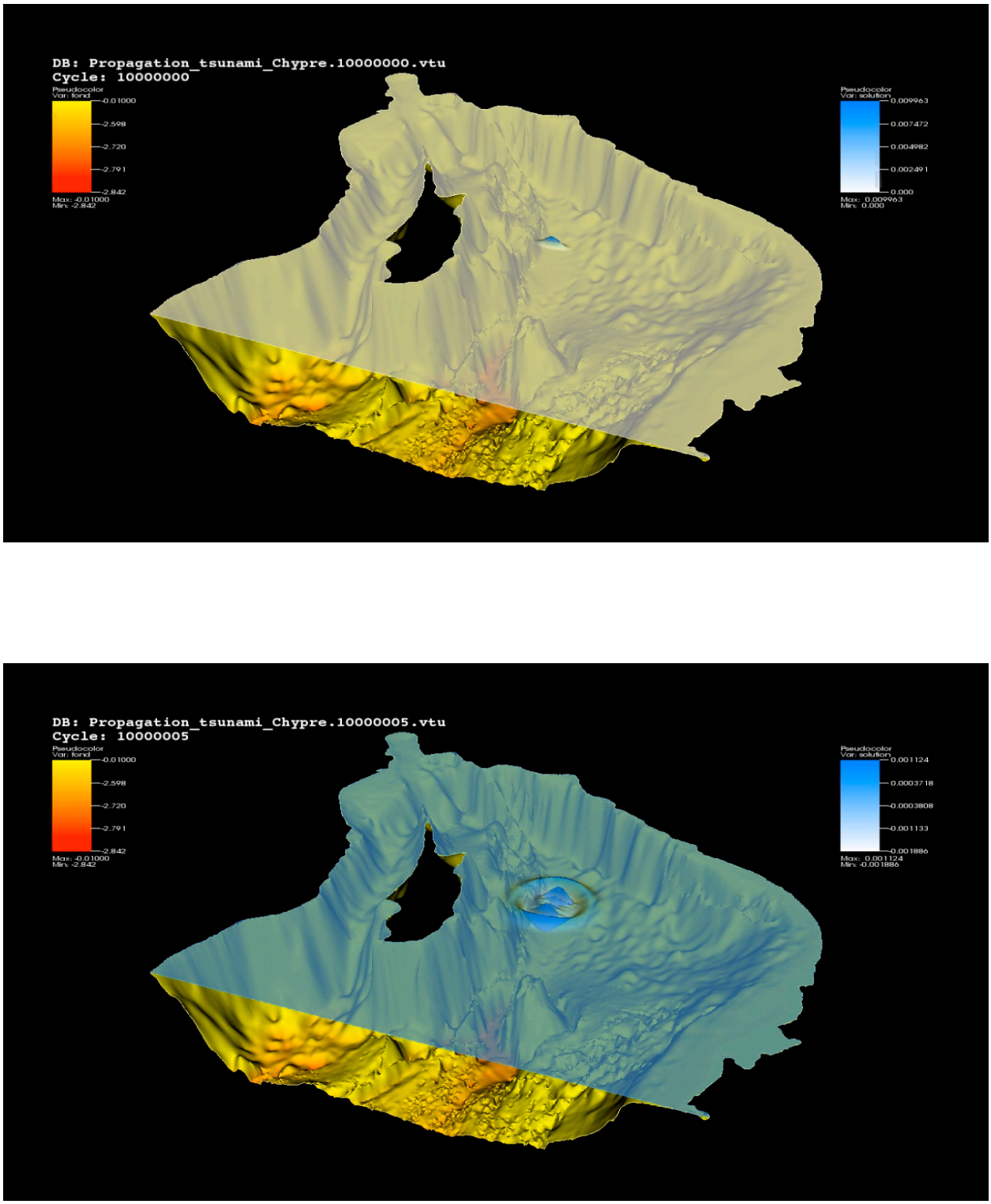
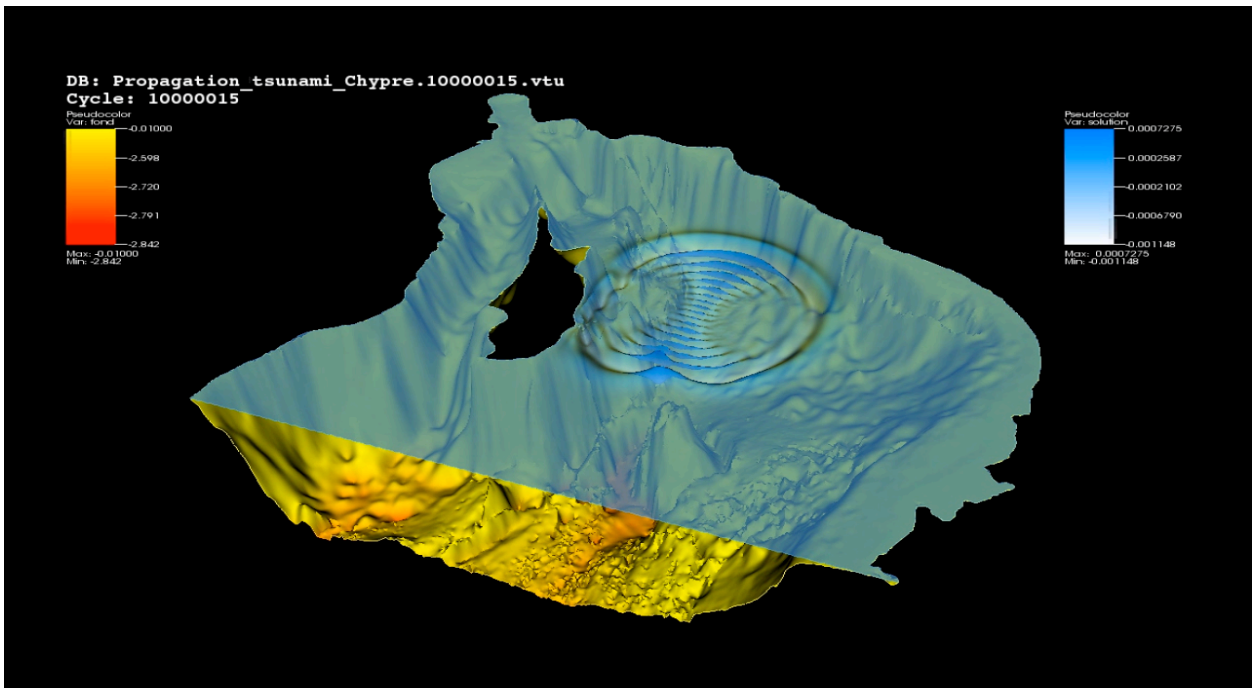



FIGURE III.41 – Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de Chypre pour $t = 0$ et $25sec$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/propagation_tsunami_Chypre_P1.mpeg.



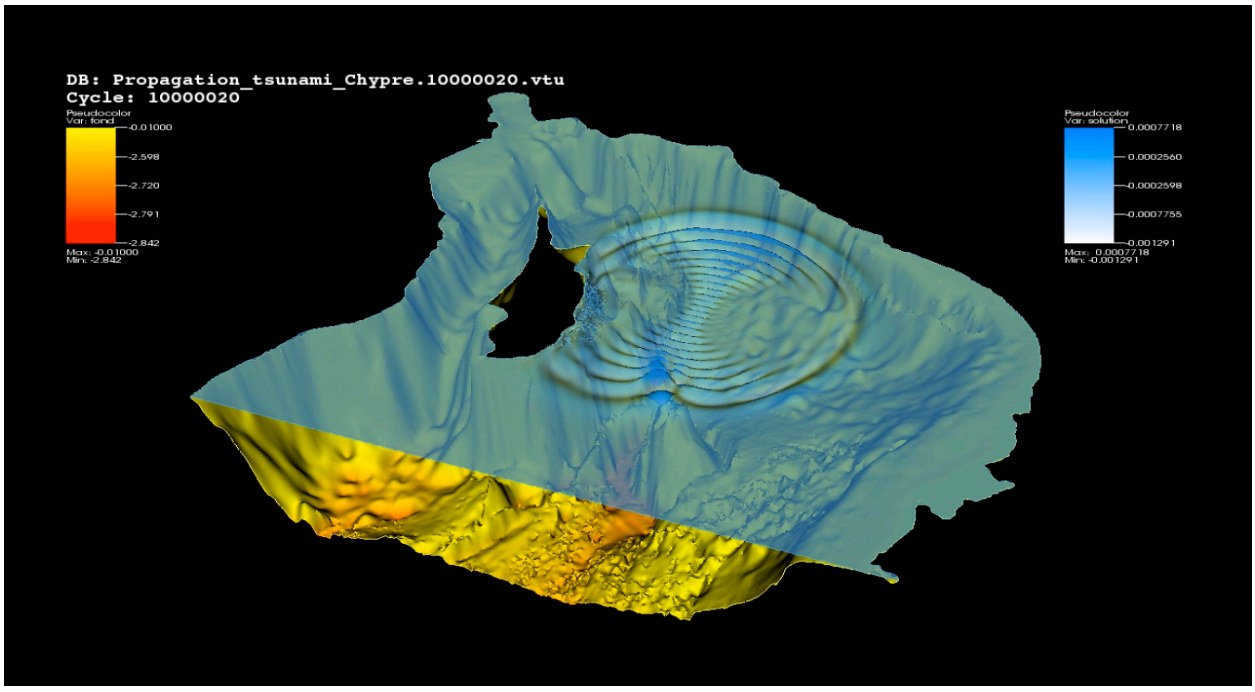
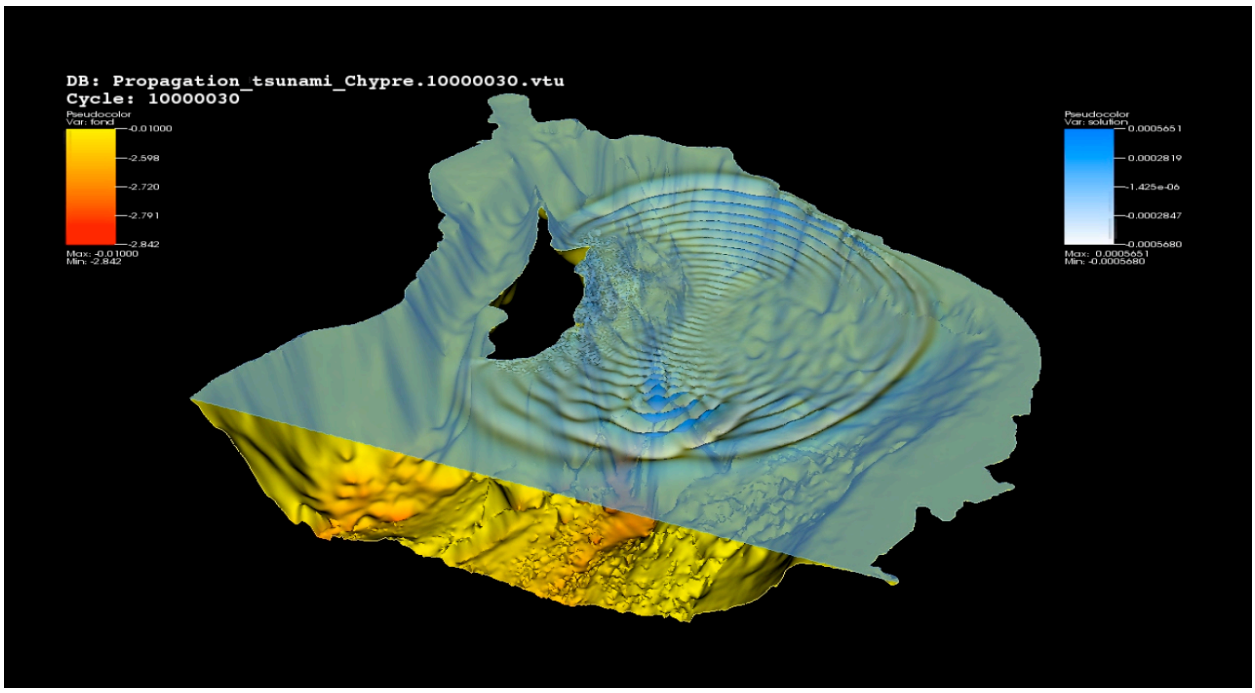




FIGURE III.42 – Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de la Chypre pour $t = 75$ et $100sec$.



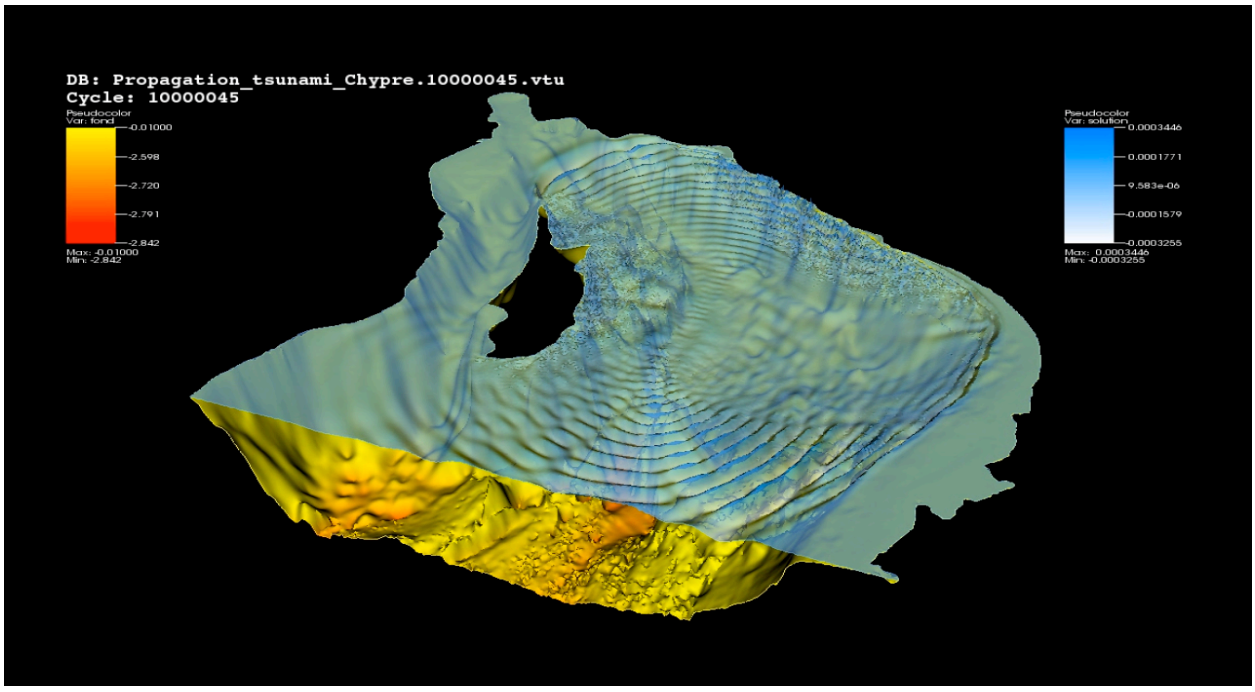




FIGURE III.43 – Propagation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, généré au large de la Chypre pour $t = 150$ et $225sec$.

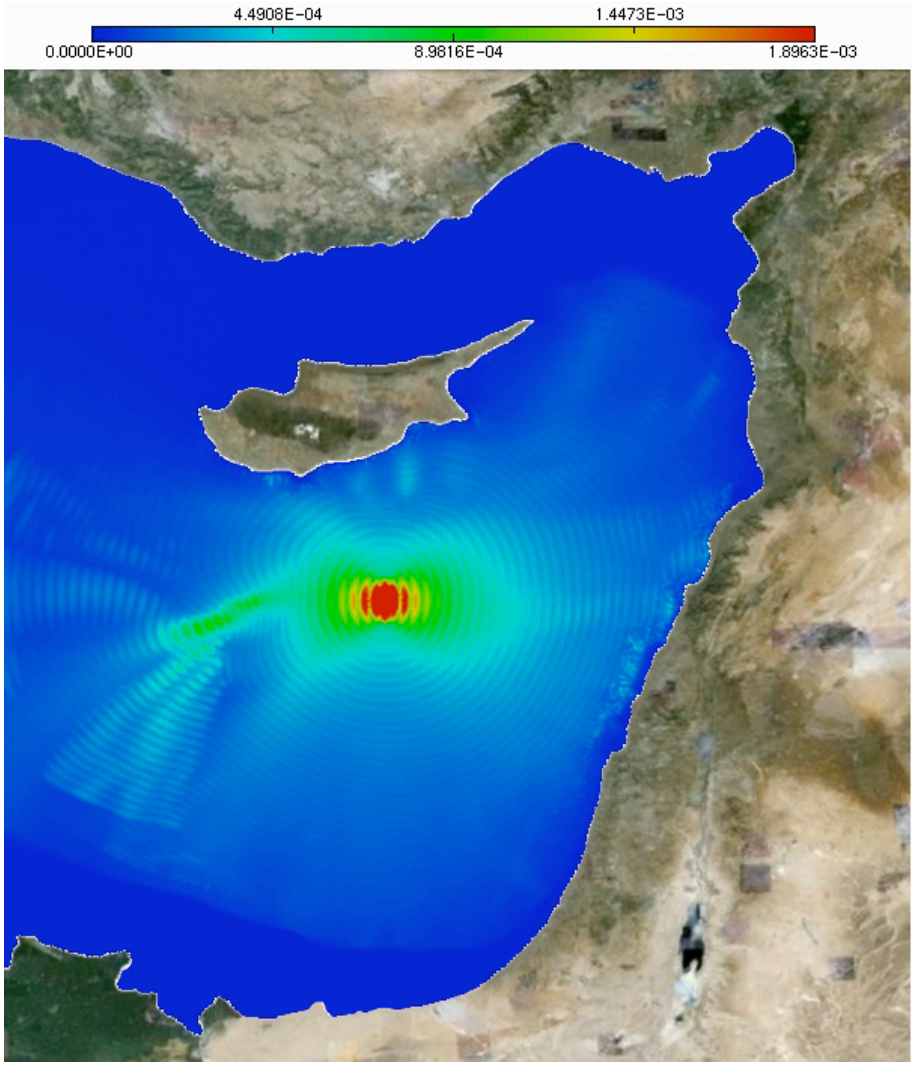



FIGURE III.44 – Le maximum de la propagation de la solution d'un *Tsunami* dans la mer Méditerranée pour $t = 230sec$.
Vidéo disponible sur : http://lamfa.u-picardie.fr/sadaka/max_solution_tsunami_Chypre_P1.avi.

## III.5 Conclusion et perspectives

Dans le cas du système de Boussinesq à fond plat, nous avons validé nos codes de FreeFem++ et établit l'adéquation du choix des éléments finis en comparant les résultats avec ceux récent des Mitsotakis *et al.* Sur cette base, nous avons intégré la variation du fond en espace et/ou en temps. Ceci nous a permis de mettre en évidence une influence de la forme du fond sur l'énergie de la vague : dans le cas d'une simple bosse ("bump") l'énergie décroît alors que dans le multi bosse, elle varie peu. Nous pensons développer cet aspect. Idéalement, il faudrait pouvoir déterminer d'une manière "optimale" (dans le sens de la minimisation de l'énergie) un profil du fond avec certaines contraintes comme une forme globale de marche (à l'approche du rivage). L'ensemble de programmes FreeFem++

qu'on a développés permet de réaliser ceci d'une manière assez souple et constitue donc un outil d'aide à la modélisation dans ces perspectives.

Sagissant de la simulation d'un *Tsunami* dans la Méditerranée, l'environnement informatique et numérique que nous avons développé permet d'intégrer des données réalistes (géographie et bathymétrie) dans un cadre relativement simple. Pour autant l'obtention des résultats réalistes nécessite d'intégrer d'autres éléments : tout d'abord, les conditions de Neumann homogène sur la partie de la frontière en mer ne sont pas réalistes puisqu'elles génèrent des réflexions artificielles : il faudrait, dans cette région, envisager par exemple des conditions aux limites absorbantes (ceci est un problème difficile). Ensuite, les conditions de Dirichlet homogène sur les autres parties du bord ne tiennent pas compte des possibilités d'envahissement des terres par les vagues (phénomène du Run-up) : on pourrait dans ce cas utiliser des conditions de types "éponges" (sponge layer) (voir [LopPeTra11]) ; ajoutons que les simulations de Runp-up sont en général réalisés en utilisant des discrétisations en Volumes finies (voir [DutKatMit11]) et il faut développer une passerelle éléments finies - volumes finis conjuguée avec un couplage de modèle.

Une validation de ces solveurs pourrait passer par les simulations des *Tsunamis* du Pacifique pour lesquels on dispose des données et en particulier de modèles réalistes de générations de *Tsunami* par séisme sous marin ([DutMitChuSho11, DutMitGarDia11, Mit09] ).

Néanmoins, les résultats présentés ici constituent un premier pas vers ces développements futurs.

# Bibliographie


[AzeBoucIvoIseMoh08] Pascal Azerad, Frederic Bouchette, Benjamin Ivorra, Damien Isebe et Mohammadi. Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 74, pp. 1262-1277, 2008. PDF. 79

[AzeBoucIvoIseMoh08] Pascal Azerad, Frederic Bouchette, Damien Isebe et Bijan Mohammadi. Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, Vol. 55, pp. 35-46, 2008. PDF. 79

[BonaChenSau04] Jerry Lioyd Bona, Min Chen, et Jean-Claude Saut. Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media : II. the nonlinear theory.*Nonlinearity*,17,no3,925-952, 2004. PDF. 81

[BreSco94] Suzanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. *Springer-Verlag*, New York, 1994. PDF. 83

[Chen09] Min Chen. Numerical investigation of a two-dimensional Boussinesq system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol 23, no4, 1169-1190, April 2009. PDF. 80

[ChenGou09] Min Chen et Olivier Goubet. Long-time asymptotic behavior of two-dimensional dissipative Boussinesq systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, Vol 2, no1, 37-53, March 2009. PDF. 79, 80, 80, 80

[Dem91] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. *Presses Universitaires de grenoble*, 1991. PDF. 84

[DiaDut07] Frédéric Dias et Denys Dutykh. Dissipative Boussinesq equations. *C. R. Mécanique*, 335 , 559-583, 2007. PDF. 79

[DiaDut09] Frédéric Dias et Denys Dutykh. Energy of *Tsunami* waves generated by bottom motion. *Proc. R. Soc. A*, 465, 725 - 744, 2009. PDF. 104

[DouMitSau07] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. On some Boussinesq systems in two space dimensions : theory and numerical analysis. *M2AN*, no. 5, 825-854, Vol 41, 2007. PDF. 79, 79, 80, 80, 80, 81, 81, 81

[DouMitSau09] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. On initial-boundary value problems for a Boussinesq system of BBM-BBM type in a plane domain. *AIMS' Journal*, Vol 23, 2009. PDF. 80, 80, 81

[DouMitSau10] Vassilios Dougalis, Dimitrios Mitsotakis et Jean-Claude Saut. Boussinesq systems of Bona-Smith type on plane domain : Theory and Numerical Analysis. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 44, no2, pp. 109-135, 2010. PDF. 81

[DutKatMit11] Denys Dutykh, Theodoros Katsaounis et Dimitrios Mitsotakis. Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup. *Computational Physics*, 230 (8), 3035 - 3061, 2011. PDF. 79, 131

[DutMitChuSho11] Denys Dutykh, Dimitrios Mitsotakis, Leonid Chubarov et Yuriy I. Shokin. The contribution of horizontal sea-bed displacements into Tsunami generation processes. *HAL* : hal-00530999, version 2, arXiv : 1011.1741, 2011. PDF. 131

[DutMitGarDia11] Denys Dutykh, Dimitrios Mitsotakis, Xavier Gardeil et Frédéric Dias. On the use of finite fault solution for Tsunami generation problems. *HAL* : hal-00509384, version 2, arXiv : 1008.2742, 2011. PDF. 131

[HecPioLehOht10] Frédéric Hecht, Olivier Pironneau, Antoine Le Hyaric et Kohji Ohtsuka. Freefem++ Manual, 2010. PDF. 79

[LinPilSau11] Félipe Linares, Didier Pilod et Jean-Claude Saut. Well-posedness of strongly dispersive two-dimensional surface waves Boussinesq. *ArXiv* :1103.4159v2, 11 Apr 2011. PDF. 82

[LopPeTra11] Nuno David De Jesus Lopes, Pedro Jorge Silva Pereira et Luís Manuel Trabucho De Campos. A numerical analysis of a class of generalized Boussinesq-type equations using continuous/discontinuous FEM. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, DOI : 10.1002/fld.2631, 2011. PDF. 131

[Mit09] Dimitrios Mitsotakis. Boussinesq systems in two space dimensions over a variable bottom for the generation and propagation of Tsunami waves. *Mat. Comp. Simul.*, 80 :860-873, 2009. PDF. 79, 131

[Pan11] Olivier Pantz. Communication personnel. `http://www.cmap.polytechnique.fr/spip.php?article105`. 79

[WalBer02] Mark Walkley et Martin Berzins. A finite element method for the two-dimensional extended Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 39 :865-885, 2002. PDF. 79, 82, 83

# Annexe A

# CEMRACS 2010

Dans cette partie, nous incorporons un travail réalisé au cours du CEMRACS 2010. Il s'agit d'un article co écrit avec Erwan Deriaz, Bruno Després, Gloria Faccanoni, Kirill Pichon Gostaf, Lise-Marie Imbert-Gérard et Remy Sart ; intitulé par :
Magnetic Equations with FreeFem++ : the Grad-Shafranov equation & The Current Hole.
(http://faccanoni.univ-tln.fr/user/papiers/emaff.pdf)

On s'intéresse à la production d'énergie par fusion nucléaire qui est le processus par lequel des noyaux se rassemblent pour former un noyau plus lourd. Afin de surmonter la répulsion électrostatique entre les particules de même charge, et de forcer les noyaux de fusionner, il faut confiner le plasma.

Dans la configuration magnétique appelée Tokamak (*TOroidalnaya KAmera i MAgnitnaya Katushka*), qui est celle retenue pour la future machine ITER (http://www.iter.org), le plasma est confiné en forme d'anneau (voir Figure A.1) au moyen d'un champ magnétique toroïdal. La configuration axisymétrique permet de décrire le plasma sur une section poloïdale bidimensionnelle : $R$ est la coordonnée radiale, $Z$ la coordonnée axiale et $\varphi$ l'angle toroïdal (qu'on néglige).

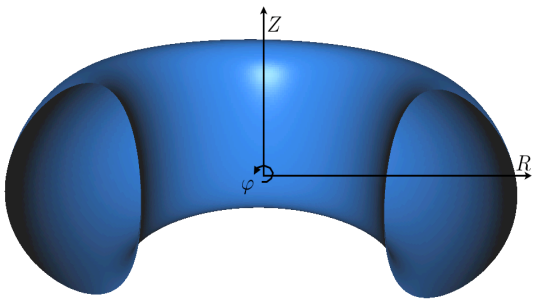



FIGURE A.1 – Future machine ITER (à gauche), domaine toroïdale (à droite)

L'objectif global de cet article, est d'évaluer, sur la base de la plate-forme FreeFem++, les équations magnétiques résultantes de la fusion thermonucléaire du plasma dans un Tokamak.

**Liens utiles :**
http://www.ann.jussieu.fr/~gostaf/emaff/
http://www.lamfa.u-picardie.fr/sadaka/EMAFF_Reduced_MHD_CIRCLE.html
http://www.lamfa.u-picardie.fr/sadaka/EMAFF_Reduced_MHD_ELLIPSE.html

**ESAIM: PROCEEDINGS, Vol. ?, 2011, 1-10**
Editors: Will be set by the publisher

# MAGNETIC EQUATIONS WITH FreeFem++: THE GRAD-SHAFRANOV EQUATION & THE CURRENT HOLE

Erwan Deriaz[1], Bruno Despres[2], Gloria Faccanoni[3], Kirill Pichon Gostaf[2], Lise-Marie Imbert-Gérard[2], Georges Sadaka[4] and Remy Sart[5]

**Abstract.** FreeFem++ [11] is a software for the numerical solution of partial differential equations. It is based on finite element method. The FreeFem++ platform aims at facilitating teaching and basic research through prototyping. For the moment this platform is restricted to the numerical simulations of problems which admit a variational formulation. Our goal in this work is to evaluate the FreeFem++ tool on basic magnetic equations arising in Fusion Plasma in the context of the ITER project.

First we consider the Grad-Shafranov equation, which is derived from the static ideal MHD equations assuming axisymetry. Some of the properties of the equation and its analytical solutions are discussed. Second we discretize a reduced resistive MHD model which admits solutions of the Grad-Shafranov equation as stationary solutions. Then the physical stability of these stationary solutions is investigated through numerical experiments and the numerical stability of the algorithm is discussed.

## 1. Introduction

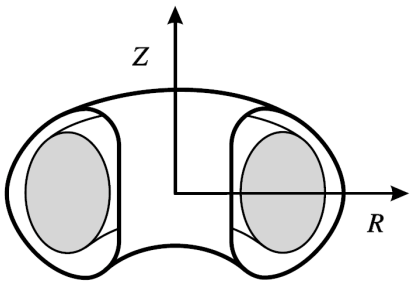
FreeFem++ is a software[1] which solves partial differential equations numerically with the finite element method. The overall goal of this study is to evaluate the FreeFem++ platform on basic magnetic equations arising in Fusion Plasma.

### 1.1. The physical context

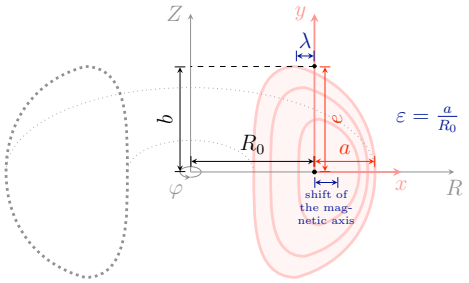
The general context is the ITER[2] project about thermonuclear fusion in a Tokamak. A nuclear fusion is the process by which multiple nuclei join together to form a heavier nucleus. In order

[1] Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Procédés Propres, 38 rue Frédéric Joliot-Curie 13451 Marseille (France); e-mail: erwan.deriaz@l3m.univ-mrs.fr
[2] Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris (France); e-mail: despres@ann.jussieu.fr & gostaf@ann.jussieu.fr & imbert@ann.jussieu.fr
[3] Institut de mathématiques de Toulon et du Var, Université du Sud Toulon-Var, 83957 La Garde (France); e-mail: faccanon@univ-tln.fr
[4] Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens (France); e-mail: georges.sadaka@u-picardie.fr
[5] École Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci, 92916 Paris (France); e-mail: remy.sart@devinci.fr
[1] http://www.freefem.org/ff++/index.htm
[2] http://www.iter.org

© EDP Sciences, SMAI 2011




(A) The toroidal vacuum vessel (outer D-shaped curve) and plasma (shown shaded). $R$ is the radial and $Z$ the vertical coordinates.




(B) The elliptical curve denotes the plasma boundary, whose center is at $R = R_0$, $Z = 0$. The parameter $b$ describes the elongation of the plasma and the triangularity $\lambda$ describes the departure of the plasma boundary from a simple ellipse. (Values of $b = 1$ and $\lambda = 0$ correspond to a circular plasma boundary). The poloidal shaded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ will be the computational domain.

FIGURE 1. Schematic cross-section of a tokamak and definition of various coordinates and parameters. To a good approximation, the tokamak can be regarded as axisymetric about the $Z$-axis, and so the plasma boundary can be described by its cross-sectional shape at one particular toroidal location.

to overcome the electrostatic repulsion between positive ions and to avoid contact between the hot plasma and the material walls, the plasma needs to be confined, for example by magnetic fields. The magnetic confinement structure of a high temperature ($107 - 108$ mega Kelvin) plasma that we consider in this work is denominated Tokamak, acronym of *TOroidalnaya KAmera i MAgnitnaya Katushka* from the Russian that means toroidal camera with magnetic coils (as illustrated schematically in Figure 1a). This design is the one that will be used in ITER. At these temperatures the highly ionized plasma is an excellent electrical conductor, and can be confined and shaped by strong magnetic fields. The main problems to deal with in plasma control are current, position and shape control. Some of these problems have already been subject to thorough research, although it is still possible to improve the behaviour and robustness in the presence of non-linearities.

### 1.2. **The model**

In this work, the plasma is described by the mono-fluid ideal magnetohydrodynamics equations under the assumption of axisymetry. Plasma floats in a somewhat D-shaped configuration surrounded by a conducting wall. Between the hot plasma and the wall is a vacuum such that the plasma has to be kept in place with external magnetic fields. Superconducting magnets produce a large toroidal (*i.e.* in the $\phi$-direction) magnetic field that, combined with poloidal (*i.e.* in the cross-sectional plane) electric currents inside the plasma, produce an inward Lorentz force counteracting the pressure force. An additional toroidal electric current produces a poloidal

magnetic field also constituting an inward Lorentz force. The position and shape of the plasma boundary can be described in terms of a set of geometrical parameters such as vertical position and elongation, illustrated in Figure 1b in which a cross-section of an axisymmetric toroidal tokamak is shown. The axis of symmetry is the $Z$-axis and the ignorable angle is $\phi$. $R$ is a radial coordinate, $R_0$ and $a$ are called the major axis and minor axis of the tokamak, $e = b/a$ is the ellipticity, $\varepsilon = a/R_0$ is the inverse aspect ratio and $\lambda$ the triangularity. Supposing invariance along the toroidal direction $\phi$, the dimensionless non-linear equations write in the form given in [4–6]

$$\begin{cases} \partial_t \psi = (1+\varepsilon x)[\psi, \varphi] + \eta(J - J_c), \\ \partial_t \omega = 2\varepsilon\omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (1+\varepsilon x)[\omega, \varphi] + \frac{1}{1+\varepsilon x}[\psi, J] + \nu \Delta_\perp \omega, \\ J = \Delta^* \psi, \\ \omega = \Delta_\perp \varphi. \end{cases}$$

The unknowns are the magnetic flux $\psi$ (that is $\mathbf{B} = \nabla \times \psi$ is the magnetic field), the velocity potential $\varphi$, the toroidal current density $J$ and the vorticity $\omega$. The Poisson brackets are denoted $[\cdot, \cdot]$ with properties

$$\begin{aligned} [a, b] &= \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} = \nabla \cdot (a(\nabla \times b)) = -[b, a], \\ [a, [b, c]] &= -[b, [c, a]] - [c, [a, b]], \\ [ab, c] &= a[b, c] + b[a, c]. \end{aligned}$$

The operator $\Delta^*$ is the Grad-Shafranov operator defined in section 2. The operator $\Delta_\perp$ is the laplacian restricted to the poloidal section. The parameter $\eta$ stands for the resistivity, $\nu$ for the viscosity. We implicitly assume a uniform density. The source term $J_c$ represents a non-ohmic driven current density that sets a constant profile likely to be perturbed with fluctuations. It is natural to impose homogeneous Dirichlet boundary conditions on the exterior frontier

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

### 1.3. **Outline**

Non-linear MHD simulations typically start from an equilibrium: we study in section 2 the stationary solution of the so-called *Grad-Shafranov equation*

$$-\Delta^* \psi = J_c, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

We present first how to compute the solution with FreeFem++ in the case of the Soloviev equilibrium which corresponds to a $J_c$ independent of $\psi$. Then we generalize the algorithm to the case of a polynomial (in $\psi$) non ohmic current. Then in section 3 we study the stability of the stationary solution in the simplified cylindrical case (*i.e.* when $\varepsilon = 0$) via the numerical

solution of

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, \varphi] + \eta(J - J_c), \\ \partial_t \omega = [\omega, \varphi] + [\psi, J] + \nu \Delta \omega, \\ J = \Delta \psi, \\ \omega = \Delta \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

We introduce some schemes and the conclusion will be that the stationary solution that we consider is unstable: this is what is called the *current hole* [6].

## 2. The equilibrium: stationary solutions

The equilibrium refers to the stationary solution of (3).

### 2.1. The Grad-Shafranov operator

In this part we study the Grad-Shafranov equation (2) [1,13] that models a plasma equilibrium where the pressure gradient balances the Lorentz force, Ampere's law and the fact that the magnetic field **B** is divergence-free (see for example [3,6,8]). The function $\psi$ is the magnetic flux and the plasma boundary corresponds to a surface of constant $\psi$. The Grad-Shafranov operator $\Delta_c^*$ is a second-order elliptic operator (the coordinates $R$ and $Z$ are defined in Figure 1a)

$$\Delta_c^* \psi := R^2 \mathrm{div}_c \left( \frac{1}{R^2} \nabla_c \psi \right),$$

where $\mathrm{div}_c$ and $\nabla_c$ respectively stands for the divergence and the gradient in the poloidal section for cylindrical coordinates, namely $\nabla_c A = (\partial_R A, \partial_Z A)^T$ and $\mathrm{div}_c \mathbf{A} = R^{-1} \partial_R (R A_R) + \partial_Z A_Z$. The function $J_c$ specifies the plasma current density $J_c(R, \psi) = R^2 p'(\psi) + F(\psi) F'(\psi)$, where $p$ is the pressure, and $F = R B_\phi$, with $B_\phi$ the toroidal component of the magnetic field. Then the equation (2) writes

$$- R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = R^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\psi} + F \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\psi}. \tag{4}$$

Due to the non-linear nature of the Grad-Shafranov equation, a general analytic solution is not possible. However, for a given RHS, the Grad-Shafranov equation can be solved numerically, with boundary conditions determined by currents showing in the external control coils which surround the vacuum vessel. A considerable complication is that the plasma cross-section (*i.e.* the value of $\psi$ along a curve), in general, is also unknown since it represents the interface between the plasma and the external vacuum region which is determined by another non-linear problem, *viz.* the external free-boundary problem with given currents in external coils. Here, we will assume that this problem is solved separately so that we prescribe a desired shape of the plasma cross-section.

**Definition 2.1** (Soloviev equilibrium)**.** The Grad-Shafranov equation (4), together with the conditions $p'(\psi) = \alpha = \mathrm{cst}$ and $F(\psi) F'(\psi) = \beta = \mathrm{cst}$, is the so-called *Soloviev equilibrium.* This solution is equivalent to Hill's spherical vortex solution from fluid mechanics, with $\psi$ representing the Stokes stream function.

To describe the poloidal plane of a torus, let us define the corresponding dimensionless Cartesian coordinates by the relations (see Figure 1b) $R = R_0 + ax = R_0(1 + \varepsilon x)$ and $Z = ay$. Then the equation (4), together the Soloviev equilibrium, can be fully expressed with the $(x, y)$-coordinates as

$$-\frac{1}{a^2}\left((1+\varepsilon x)\ \nabla\cdot\left(\frac{\nabla\psi}{1+\varepsilon x}\right)\right) = \left(\alpha R_0^2(1+\varepsilon x)^2 + \beta\right), \tag{5}$$

where the operator $\nabla\cdot$ and $\nabla$ here stand for the classical divergence and gradient in the Cartesian coordinates.

### 2.2. **Weak formulation**

The convenient mathematical formulation of the problem is the following. We multiply the equation (5) by $a^2\varphi/(1 + \varepsilon x)$ where the test function is $\varphi$ and we integrate by parts on the domain $\Omega$. Using the homogeneous boundary condition we readily obtain the formulation "find $\psi \in V$ such that $a(\psi, \varphi) = \ell(\varphi)$ for all $\varphi \in V$" where the bilinear form and the linear right hand side are

$$a(\psi,\varphi) = \int_\Omega \frac{\nabla\psi\cdot\nabla\varphi}{1+\varepsilon x}\ \mathrm{d}\Omega, \qquad \ell(\varphi) = \int_\Omega a^2\left(\alpha R_0^2(1+\varepsilon x) + \frac{\beta}{1+\varepsilon x}\right)\varphi\ \mathrm{d}\Omega$$

and the convenient functional space is $V = H_0^1(\Omega)$. This weak formulation fits within the frame of the Lax-Milgram theorem since the bilinear form $a$ is symmetric, continuous and coercive. The linear form $\ell$ is continuous. This ensures the existence and uniqueness of the solution $\psi$. Other boundary conditions would lead to a different bilinear form $a$, a different linear form $\ell$ or a slightly different space $V$ but would not compromise the conclusion of Lax-Milgram theorem.

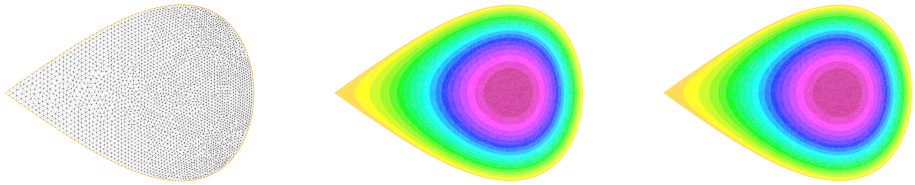
### 2.3. **Computational examples**

We use the finite element method with linear triangular elements in order to compute the numerical solutions, as described in the FreeFem++ manual [11]. In order to perform a validation of the code, we present here a set of computational examples for some analytical solutions that can be found in the literature. A first example permits to describe the structure of the code and to compare results obtained with a boundary elements method. In a second example a very good convergence is observed. The following examples focus on the handling of different types of right hand side depending on $\psi$. In the third example, the right hand side is linear in $\psi$. In the fourth example, non-linear right hand sides are considered, so that a linearisation scheme has to be chosen.

#### 2.3.1. *A first example*

The domain $\Omega$ is defined by its frontier

$$\partial\Omega = \left\{(R,Z)\ |\ R = R_0\sqrt{1+\tfrac{2a\cos\alpha}{R_0}},\ Z = aR_0\sin\alpha,\ \alpha = 0:2\pi\right\}.$$



(A) $N_{\partial\Omega} = 200$ (B) $\psi_{\text{ex}}$ (C) $\psi$

FIGURE 2. Example I: comparison of the exact magnetic flux $\psi_{\text{ex}}$ and the numerical magnetic flux $\psi$ with $\mathbb{P}^1$ finite elements. We also plot the mesh.

The exact solution is given [2]:

$$\psi(R,Z) = \frac{f_0 R_0^2}{2}\left(a^2 - Z^2 - \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{4R_0^2}\right).$$

For the parameter choice $a = 0.5$, $f_0 = 1$ and $R_0 = 1$, the numerical results are displayed in Figure 2. A comparison is possible with [2] where the numerical solution is obtained with the Boundary Element Method. To show how to compute the solution with FreeFem++ and estimate the error, let us go through all the steps one by one (for more details see [11]).

- We declare the variables.

```
int  n = 200; // n is the number of the points in the border ∂Ω
real L2error;
```

- The right hand side $g$, the boundary condition $b$ and the exact solution $\psi_{\text{ex}}$ are defined analytically (in FreeFem++ variables must be noted $x$ and $y$).

```
func g = x^2+1.;
func b = 0.;
func Exact = (1.-(2.*y)^2-(2.*(x-1.)+(x-1.)^2)^2)/8.;
```

- The boundary is described analytically by a parametric equation for $x$ and for $y$. The mesh of the domain is automatically generated by using $n$ points on the border. The domain is assumed to be on the left side of the boundary which is implicitly oriented by the parametrization. As $\Omega$ is not a polygonal domain, a "skin" remains between the exact domain and its approximation. However, we notice that all corners of the triangulation lies in $\partial\Omega$. The visualization of the triangulation is done and saved in a postscript file.

```
border Gamma(t=0,2.0*pi){x=sqrt(1.+cos(t));y=0.5*sin(t);}
mesh Th=buildmesh (Gamma(n));
plot(Th,wait=true,ps="Mesh.eps");
```

- The finite element space is a space of polynomial functions on elements, triangles here, with certain matching properties at edges, vertices etc. Here we define the space $\mathbb{P}^1$ of continuous piecewise linear functions which are equal to 1 on one vertex of the

triangulation and 0 on all others. We declare that $\psi$, $\psi_{\text{ex}}$, $\varphi$ and $|\psi - \psi_{\text{ex}}|$ are approximated as continuous piecewise linear functions.

```
fespace Vh(Th,P1);
Vh psi,phi,error,psiExact;
```

- The visualization of the exact solution is done and saved in a postscript file.

```
psiExact = Exact;
plot(psiExact,wait=true,fill=true,value=true,ps="Exact.eps");
```

- We define the bilinear form of Grad-Shafranov equation and its Dirichlet boundary conditions. In FreeFem++ there is no need to distinguish the bilinear form from the linear form. As long as the terms are inside different integrals, FreeFem++ interpreter finds out which one is the bilinear form by checking where both terms $\psi$ and $\varphi$ are present. The problem is solved, the visualization of the approximation is done and saved in a postscript file.

```
solve gs(psi,phi)=
      int2d(Th)(dx(psi)*dx(phi)+dy(psi)*dy(phi))
     +int2d(Th)(dx(psi)*phi/x)
     -int2d(Th)(g*phi)
     +on(Gamma,psi=b);
plot(psi,wait=true,value=true,fill=true,ps="Approximation.eps");
```

- The error $E(\psi) = \|\psi - \psi_{\text{ex}}\|_{L^2} / \|\psi_{\text{ex}}\|_{L^2}$ is computed and written in the console.

```
error = abs(psi-Exact);
L2error = sqrt(int2d(Th)(square(error)))/sqrt(int2d(Th)(square(psiExact)));
cout << "L2error=" << L2error << endl;
```

- Results are compared with the exact solution and represented in terms of contours in Figure 2.

2.3.2. *Second example: Soloviev Equilibrium with triangularity parameter*

In this example we test the solver over a class of analytical solutions which can be written in Cartesian coordinates as

$$\psi(x,y) = 1 - \left(x - \frac{\varepsilon}{2}(1-x^2)\right)^2 - \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)(1+\varepsilon x)^2 + \lambda x\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}x\right)\right)\left(\frac{a}{b}y\right)^2$$

where $\lambda$ stands for the triangularity parameter. A straightforward computation shows that this solution corresponds to a Soloviev equilibrium, *i.e.*

$$-\Delta^*\psi = \alpha(R_0(1+\varepsilon x))^2 + \beta \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{4(a^2+b^2)\varepsilon + a^2(2\lambda - \varepsilon^3)}{2R_0^2\varepsilon a^2 b^2} \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{\lambda}{b^2\varepsilon}.$$

We remark that $\psi = 0$ going through $(\pm 1, 0)$ and $(0, \pm\frac{b}{a})$; the shift of the magnetic axis is then given by $(\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1)\varepsilon$. For the need of further comparisons with [6], in our tests we use the following parameters: the ellipticity $\varepsilon = 3/10$, the triangularity $\lambda = 0$, the major axis $R_0 = 5/3$,

(A) $N_{\partial\Omega}$=128 (B) $\psi_{\text{ex}}$ (C) $\psi$ (D) $\frac{\partial\psi_{\text{ex}}}{\partial x}$ (E) $\frac{\partial\psi}{\partial x}$

FIGURE 3. Second example: comparison of the exact magnetic flux $\psi_{\text{ex}}$ and the numerical magnetic flux $\psi$. We also plot the mesh and the $x$-derivative.

the minor axis $a = 1/2$ and the elongation $b = 7/10$, which implies $\alpha \approx 4.35$ and $\beta = 0$. The geometry is the $D - shaped$ configuration defined by $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x, y) = 0\}$, *i.e.*

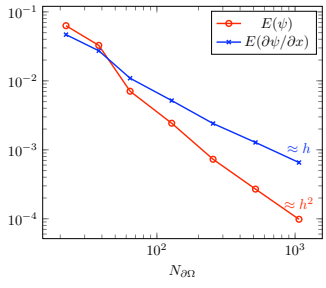
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1 - \left(x - \frac{\varepsilon}{2}(1 - x^2)\right)^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)(1 + \varepsilon x)^2 + \lambda x\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}x\right)}}, \qquad x \in [-1; 1].$$

In Figure 3 we draw the mesh generated by FreeFem++ with $N_{\partial\Omega} = 128$ elements on the border, the magnetic flux $\psi_{\text{ex}}$ and the approximated magnetic flux $\psi$ computed with $\mathbb{P}^1$ finite elements and the exact and approximated derivatives $\partial_x\psi_{\text{ex}}$ and $\partial_x\psi$. For a given function $\xi$ and its numerical approximation $\xi_{\text{ex}}$, the error $E(\xi)$ is defined as the relative difference in the $L^2$ norm

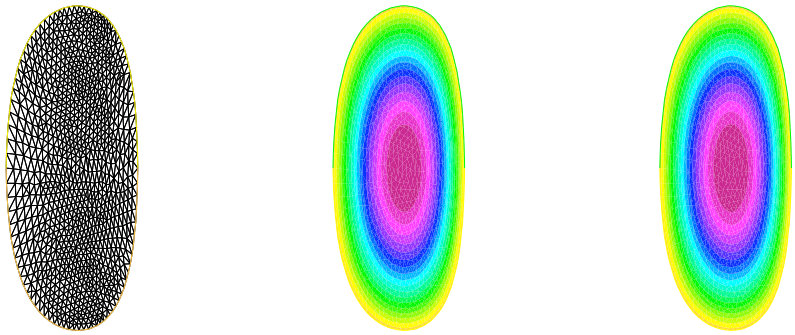
$$E(\xi) = \frac{\|\xi - \xi_{\text{ex}}\|_{L^2}}{\|\xi_{\text{ex}}\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{\int_\Omega (\xi - \xi_{\text{ex}})^2 \, \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega (\xi_{\text{ex}})^2 \, \mathrm{d}\Omega}}.$$

We obtain the following table of convergence

| $N_{\partial\Omega}$ | $E(\psi)$ | $E(\partial\psi/\partial x)$ |
|---|---|---|
| 22 | 0.0630042 | 0.0467509 |
| 38 | 0.0326535 | 0.0272896 |
| 64 | 0.00706633 | 0.0109076 |
| 128 | 0.00242758 | 0.00517435 |
| 255 | 0.00072874 | 0.00240365 |
| 517 | 0.00026911 | 0.00127819 |
| 1067 | 0.00009828 | 0.000653738 |




Numerical results match perfectly the theoretical expectations: $\mathbb{P}^1$ elements provide a second convergence rate for the magnetic flux, while gradients are approximated at first order.



(A) Mesh (B) $\psi_{\text{ex}}$ (C) $\psi$

FIGURE 4. Third example: comparison of the exact solution $\psi_{\text{ex}}$ and the numerical solution $\psi$. We also plot the mesh.

2.3.3. *Third example: Linear RHS*

We consider here a first example of RHS without Soloviev equilibrium:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = (R^2+1)\psi. \tag{6}$$

Straightforward computation shows that the analytical solution is $\psi(R,Z) = \cos\left(\frac{R^2}{2}\right)\cos(Z) - \frac{1}{2}$. The computational domain $\Omega$ is

$$\partial\Omega = \left\{ (R,Z) \mid R \in [\tfrac{2}{3}\sqrt{3\pi}, \tfrac{2}{3}\sqrt{6\pi}],\ Z = \arccos\left(\frac{1}{2\cos\frac{R^2}{2}}\right) \cup Z = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2\cos\frac{R^2}{2}}\right) \right\}.$$

Figure 4 shows the exact and the approximated solutions represented in terms of contours obtained by FreeFem++ with $\mathbb{P}^1$ finite elements: the numerical solution agrees very well with the analytical one.

2.3.4. *Fourth example: Polynomial non-linear RHS*

In this section we consider a non-linear right hand side for the Grad-Shafranov equation. There is no result concerning uniqueness of the solution, but we would still like to adapt the previous method by defining an iterative sequence. In what follows we study the convergence of the algorithm to a known analytical solution.

Consider a general problem described by

$$-\Delta_c^* \psi = G(\psi), \tag{7}$$

where the non-linear function $G$ can be written as $\psi G_1(\psi) + G_2(\psi)$. A Picard's iteration (8) starts from any initial function, then each calculus step solves a linear problem which depends

on the previous step's result. Each step is performed by solving the same linear problem corresponding to the example 3, so that the basic method is kept unchanged. The issue is then to choose how to define this linear formulation. To obtain the desired linear right hand side with respect to $\psi$, the functions $G_1$ and $G_2$ has to depend only on the result of the previous step, denoted $\psi_n$. From then on we consider the algorithm

$$\begin{cases} \psi_0 \text{ given,} \\ -\Delta_c^* \psi_{n+1} = \psi_{n+1} G_1(\psi_n) + G_2(\psi_n), \end{cases} \tag{8}$$

and the iteration is stopped when $\mathcal{N}(\psi_{n+1} - \psi_n) < \text{tol}$ where $\mathcal{N}$ is a norm and tol a prescribed tolerance. In fact each choice of $G_1$ and $G_2$ gives a new scheme.

Here we detail the case $G(\psi) = \psi^2 (k_1 + k_2 R^2 \psi)$, together with Dirichlet boundary conditions, on the domain $\Omega$ defined in poloidal coordinates by $R \in ]0,1[$ and $z \in ]-1,1[$. When $k_2 = 2a(k_1 - 9a)$, an analytic solution of this equation is given [12] by $\psi_{ex} = -6/(9aR^2 + k_1(z+c_1)^2)$. The variational formulation reads

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial \psi}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}\varphi \right) = \int_\Omega \left( k_1 \psi^2 \varphi + k_2 R^2 \psi^3 \varphi \right) + \text{ boundary terms}, \tag{9}$$

so that the point is now to choose the implicit and explicit parts of the second integral. As explained earlier, the aim is to obtain a linear term in $\psi_{n+1}$ plus a term only depending on $\psi_n$. Let $(\beta, \delta)$ be parameters and let us write the second term

$$\int_\Omega \left( k_1 (\psi_k)^{2-\beta} (\psi_{k+1})^{\beta} \varphi + k_2 R^2 (\psi_k)^{3-\delta} (\psi_{k+1})^{\delta} \varphi \right). \tag{10}$$

In order to get the desired form, the parameters $(\beta, \delta)$ have to belong to $\{0,1\}^2$: it provides at most linear terms in the unknown $\psi_{k+1}$. In our test the starting point for the iterative method is a perturbation of the exact solution: $\psi_0 = \psi_{\text{ex}}(1 + R(R-1)(z+1)(z-1))$; the parameters are $k_1 = 0.1$, $a = 0.1$ and $c_1 = 2$, and the domain studied is the square $\Omega = \{(R,z) \in [0,1] \times [-1,1]\}$. Here is the description of the different schemes:

| Scheme | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\delta$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

(11)

We tested this four schemes with $\mathbb{P}^1$ and $\mathbb{P}^2$ types finite elements and tol $= 10^{-5/2}$ to stop the iterations. It is obvious that the behavior of the scheme is governed by the higher order polynomial term (described by $\delta$): an implicit term has to be chosen there to allow any hope of convergence toward the analytical solution. We define the relative error in $\mathcal{N}$ norm as $E(\psi) = \mathcal{N}(\psi - \psi_{ex})/\mathcal{N}(\psi_{ex})$. Using the $\mathbb{P}^1$ elements, the scheme (2) shows a convergence order of 1.712 in $\mathbb{L}^2$ norm, 1.034 in $\mathbb{H}^1$ norm. The scheme (3) a convergence order of 1.608 in $\mathbb{L}^2$ norm, 1.031 in $\mathbb{H}^1$ norm and the scheme (4) a convergence order of 1.764 in $\mathbb{L}^2$ norm, 1.036 in $\mathbb{H}^1$

norm. Another kind of behavior is observed for the scheme (1): it seems that the computation converges, but to another solution. In fact, as the problem is non linear, the equation may have several solutions. Here we underline the fact that the schemes (2) and (4) which seem to converge to the given analytical solution, both make implicit the term of higher degree in the polynomial right hand side. Both of them satisfy $\delta = 1$. More research is needed to obtain more definitive conclusions for this problem. In particular one may think of studying the influence on the non linearity and of the amplitude of the initial perturbation.

## 3. The Current Hole: unstable equilibrium

This part is devoted to the implementation of the time-dependent problem (3). For the need of further comparisons with analytical work, we simplify the problem and choose the planar cylindrical geometry: that is $\varepsilon = 0$ (it is not a restriction). In this case $\Delta^* = \Delta_\perp = \Delta$. Thus the model reads ($x \in \Omega$, $t \in [0, T]$)

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, \varphi] + \eta(J - J_c), & \text{(12a)} \\ \partial_t \omega = [\omega, \varphi] + [\psi, J] + \nu \Delta \omega, & \text{(12b)} \\ J = \Delta \psi, & \text{(12c)} \\ \omega = \Delta \varphi. & \text{(12d)} \end{cases}$$

This is a non linear and non stationary system of partial differential equations. As the initial conditions for the time-dependent simulations, we use the solution of the Grad-Shafranov equilibrium based on current profile. The velocity and vorticity are set to zero. Thus at $t = 0$ we set

$$\begin{cases} \varphi(0, x) = \omega(0, x) = 0, & x \in \Omega, \\ J(0, x) = J_c(x), & x \in \Omega, \\ \psi(0, x) = \Delta^{-1} J_c(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

To close the system we consider as before the homogeneous Dirichlet boundary conditions for all variables

$$\varphi(t, x) = \omega(t, x) = \psi(t, x) = J(t, x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t \in [0, T].$$

The system (12) verifies some conservation properties.

**Proposition 3.1** (Energy Conservation)**.** *Assume $\eta = \nu = 0$. Then regular solutions of* (12) *satisfy*

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |\nabla \psi|^2 + |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

**Remark 3.2.** Notice that $\int_\Omega |\nabla \psi_{n+1}|^2 + |\nabla \varphi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega |\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}$ is the total energy. If one assumes that $J_c = 0$ but $\eta > 0$ and $\nu > 0$, then one gets

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega |\nabla \psi|^2 + |\nabla \varphi|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq 0.$$

*Proof.* With the assumption $\eta = \nu = 0$, and knowing that $J = \Delta\psi$ and $\omega = \Delta\varphi$, the model (12) writes

$$\begin{cases} \partial_t \psi = [\psi, \varphi], & \text{(13a)} \\ \partial_t(\Delta\varphi) = [\Delta\varphi, \varphi] + [\psi, \Delta\psi], & \text{(13b)} \end{cases}$$

Multiplying (13a) by $\Delta\psi$ and (13b) by $\varphi$ and integrating over $\Omega$, we get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega [\psi,\varphi]\Delta\psi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega [\Delta\varphi,\varphi]\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega [\psi,\Delta\psi]\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

The energy identity is finally obtained using the following property of the Poisson brackets

$$\int_\Omega [a,b]c \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega a[b,c] \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} ac(\nabla \times b \cdot \mathbf{n}) \,\mathrm{d}\sigma$$

where $\mathbf{n}$ is the outgoing normal to the surface $\mathrm{d}\sigma$, together with the boundary conditions $\psi = \varphi = 0$ on $\partial\Omega$, from (1). □

**Proposition 3.3** (Magnetic Helicity Conservation)**.** *With the same hypotheses as in proposition 3.1, one has*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \psi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

*Proof.* See [3, page 21]. Since the right hand side of the $\psi$ equation can be written is divergent form, this is immediate. □

**Proposition 3.4** (Cross-Helicity Conservation)**.** *With the same hypotheses as in proposition 3.1, one has*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \omega\psi \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

*Proof.* See [3, page 21]. □

Consistently with [6], we will choose in our numerical tests the following radial profile for the source term

$$J_c = \frac{(1-R^4)}{5} - 0.266(1-R^2)^8,$$

with $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ for $\mathbf{x} \in \Omega = \mathcal{C}(0,1)$, and the viscosity parameters $\eta = 1 \cdot 10^{-5}$ and $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$.

### 3.1. **Von Neumann stability analysis**

In the following paragraph, we show that it is possible to solve the MHD reduced system (12) numerically using an explicit time scheme for all the non-linear terms and that this scheme is stable under a CFL condition $\delta t \leq Ch$ where $h$ is the minimal space step. Let $X = \big(\delta\psi, \delta\varphi, \delta J, \delta\omega\big)^T$ and $\partial_t X = F(X)$. In order to apply the von Neumann stability analysis, we

linearise the system of equations. Taking $X = \overline{X} + X'$, with $\partial_t \overline{X} = F(\overline{X})$ and $\|X'\| \ll \|\overline{X}\|$, we have

$$\partial_t X = \partial_t \overline{X} + \partial_t X' = F(\overline{X} + X') = F(\overline{X}) + \nabla F(\overline{X}) \cdot X' + o(X')$$

so the linearization [10] provides $\partial_t X' = \nabla F(\overline{X}) \cdot X'$. In our case, this corresponds to

$$\begin{cases} \partial_t \psi' = [\overline{\psi}, \varphi'] + [\psi', \overline{\varphi}] + \eta \Delta \psi', & \text{(14a)} \\ \partial_t \omega' = [\overline{\omega}, \varphi'] + [\omega', \overline{\varphi}] + [\overline{\psi}, J'] + [\psi', \overline{J}] + \nu \Delta \omega', & \text{(14b)} \\ J' = \Delta \psi', & \text{(14c)} \\ \omega' = \Delta \varphi'. & \text{(14d)} \end{cases}$$

We remark that the diffusive terms $\eta\Delta\psi'$ and $\nu\Delta\omega'$ integrated reasonably well (*i.e.* in an implicit scheme or explicitly under the condition $\delta t \leq h^2/\eta$ and $\delta t \leq h^2/\nu$) smooth out the solution. Then the interesting case is when $\eta$ and $\nu$ are small, so let us make the assumption that $\eta$ and $\nu$ vanish, and see what happens regarding the linear stability of the equations.

We assume that $X' = e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} X_0$, then $J' = -|\xi|^2 \psi'$, $\omega' = -|\xi|^2 \varphi'$ and, from (14a) and (14b),

$$\begin{cases} \partial_t \psi' = [\overline{\psi}, \varphi'] + [\psi', \overline{\varphi}], \\ \partial_t \varphi' = -\frac{1}{|\xi|^2}[\overline{\omega}, \varphi'] + [\varphi', \overline{\varphi}] + [\overline{\psi}, \psi'] - \frac{1}{|\xi|^2}[\psi', \overline{J}]. \end{cases}$$

As we study the numerical instabilities for large values of $|\xi|$, we can neglect the two terms multiplied by $1/|\xi|^2$. Then knowing that $[a, b] = -[b, a]$ we write:

$$\begin{cases} \partial_t \psi' = [\overline{\psi}, \varphi'] - [\overline{\varphi}, \psi'], \\ \partial_t \varphi' = -[\overline{\varphi}, \varphi'] + [\overline{\psi}, \psi'], \end{cases}$$

*i.e.*

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \psi' \\ \varphi' \end{pmatrix} \qquad \text{with} \qquad \mathbb{M}(\cdot) := \begin{pmatrix} -[\overline{\varphi}, \cdot] & [\overline{\psi}, \cdot] \\ [\overline{\psi}, \cdot] & -[\overline{\varphi}, \cdot] \end{pmatrix}.$$

Putting $\xi = |\xi|(\cos\theta, \sin\theta)$, the operator-matrix $\mathbb{M}$ is symmetric and can be put under the form:

$$\mathbb{M} = i|\xi| \mathbb{Q}_\theta \begin{pmatrix} \mu_\theta^{(1)} & 0 \\ 0 & \mu_\theta^{(2)} \end{pmatrix} \mathbb{Q}_\theta^{-1}$$

with $\mathbb{Q}_\theta$ independent of $|\xi|$ and $\mu_\theta^{(i)} \in \mathbb{R}$, $|\mu_\theta^{(i)}| \leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi\|_{L^\infty}$, for $i = 1, 2$.

As a conclusion, the reduced MHD model (12) is equivalent to a transport equation regarding the local numerical stability. Hence, high order explicit schemes (see Figure 5 for the domains of stability) are stable under the CFL condition $\delta t \leq Ch/\mu$ with $C \approx 1$ a constant depending on the scheme and $\mu = \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla \times \psi\|_{L^\infty}$.

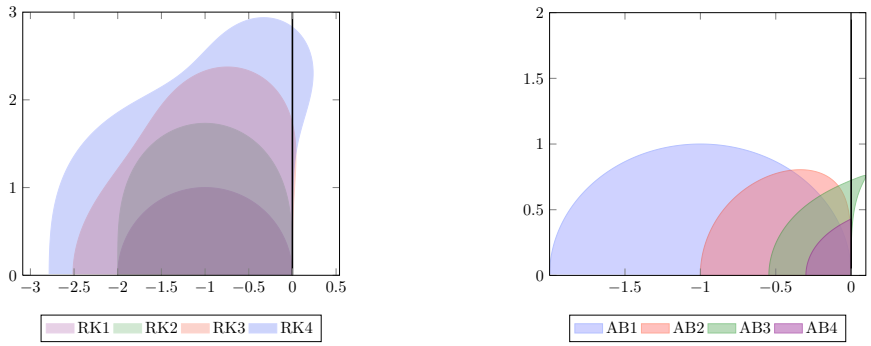



FIGURE 5. Von Neumann stability domains for the first four Runge-Kutta and Adams-Bashforth schemes. The operator $\mathbb{M}$ is along the $(Oy)$ axis.

### 3.2. **Numerical Discretization**

The von Neumann stability analysis shows that, although possible, an explicit time discretization of (12) leads to a restrictive CFL condition. Therefore, in addition to the Adams-Bashforth order two scheme treated at the end of this section, we consider two implicit schemes: the first scheme, the Crank-Nicolson scheme, is directly inspired by [6], the second scheme is similar to the one in [9]. The Crank-Nicolson scheme and the stable time integrator require the resolution of linear systems.

Let us denote by $X_n = (J_n, \psi_n, \varphi_n, \omega_n)$ the approximate value at time $t = t_n$ and by $\delta t$ the time increment: that is $t_{n+1} = t_n + \delta t$, and $(\delta J, \delta\psi, \delta\varphi, \delta\omega) = X_{n+1} - X_n$ the corresponding increment of the solution. Then the unknown fields at time $t = t_{n+1}$ are obtained by solving

$$\begin{cases} \delta\psi = ([\psi_n + \alpha\delta\psi, \varphi_n + \beta\delta\varphi] + \eta(J_n + \gamma\delta J) - \eta J_c)\,\delta t, \\ \delta\omega = ([\omega_n + \alpha\delta\omega, \varphi_n + \beta\delta\varphi] + [\psi_n + \alpha\delta\psi, J_n + \beta\delta J] + \nu\Delta(\omega_n + \gamma\delta\omega))\,\delta t, \\ \delta J = \Delta(\delta\psi), \\ \delta\varphi = \Delta^{-1}(\delta\omega), \end{cases}$$

with the same initial and boundary conditions as before, and $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ parameters of the numerical scheme for the time integration. Neglecting higher order cross terms, the matricial formulation of our system of equations is

$$\mathbb{M}\begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\varphi \\ \delta J \\ \delta\omega \end{pmatrix} = \delta t \begin{pmatrix} [\psi_n, \varphi_n] + \eta(J_n - J_c) \\ [\omega_n, \varphi_n] + [\psi_n, J_n] + \nu\Delta\omega_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\mathbb{M}(\cdot) := \begin{pmatrix} I_d + \alpha\delta t[\varphi_n,\cdot] & -\beta\delta t[\psi_n,\cdot] & -\gamma\eta\delta t I_d & 0 \\ \alpha\delta t[J_n,\cdot] & -\beta\delta t[\omega_n,\cdot] & -\beta\delta t[\psi_n,\cdot] & I_d + \alpha\delta t[\varphi_n,\cdot] - \gamma\nu\delta t\Delta(\cdot) \\ -\Delta(\cdot) & 0 & I_d & 0 \\ 0 & -\Delta(\cdot) & 0 & I_d \end{pmatrix}. \tag{15}$$

**Remark 3.5.** Only the resolution of a global linear system is needed in order to compute the fields at the new time step.

3.2.1. *Crank-Nicolson time integrator:* $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$

It is based on a linearised Crank-Nicolson scheme. The equation $\partial_t u = F(u)$ is discretized in time by the following order two scheme:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} = \frac{1}{2}\left(F(u_n) + F(u_{n+1})\right)$$

with $u_{n+1} = u_n + \delta u$, then we have to solve

$$\underbrace{\left(I_d - \frac{\delta t}{2}\nabla F(u_n)\right)}_{\mathbb{M}} \delta u = \delta t\ F(u_n).$$

In the case of the reduced MHD equations (12), the system to solve writes

$$\mathbb{M}\begin{pmatrix}\delta\psi\\ \delta\varphi\\ \delta J\\ \delta\omega\end{pmatrix} = \delta t \begin{pmatrix}[\psi_n,\varphi_n] + \eta(J_n - J_c)\\ [\omega_n,\varphi_n] + [\psi_n, J_n] + \nu\Delta\omega_n\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

where the matrix $\mathbb{M}$ corresponds to

$$\mathbb{M}(\cdot) := \begin{pmatrix} I_d + \frac{\delta t}{2}[\varphi_n,\cdot] & -\frac{\delta t}{2}[\psi_n,\cdot] & -\frac{\delta t\,\eta}{2} I_d & 0 \\ \frac{\delta t}{2}[J_n,\cdot] & -\frac{\delta t}{2}[\omega_n,\cdot] & -\frac{\delta t}{2}[\psi_n,\cdot] & I_d + \frac{\delta t}{2}[\varphi_n,\cdot] - \frac{\delta t\,\nu}{2}\Delta(\cdot) \\ -\Delta(\cdot) & 0 & I_d & 0 \\ 0 & -\Delta(\cdot) & 0 & I_d \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Although the discrete unknowns usually satisfy $J \in \mathbb{P}^0$, $\varphi, \omega \in \mathbb{P}^1$, $\psi \in \mathbb{P}^2$, we tested the two cases $\psi, \varphi, J, \omega \in \mathbb{P}^1$ and $\psi, \varphi, J, \omega \in \mathbb{P}^2$ with FreeFem++. The solution has also to satisfy homogeneous Dirichlet boundary conditions for the four fields $\psi = \varphi = J = \omega = 0$ on $\partial\Omega$, as well as the initial conditions $-\Delta^*\psi_0 = J_0 = J_c$ and $\omega_0 = \varphi_0 = 0$ on $\Omega$ at $t = 0$. In the scope of the analysis 3.1, the domain of stability of the Crank-Nicolson scheme is the half plan $\{\Re\mathrm{e}(z) \leq 0\}$. This domain has to be compared with the stability domains of explicit schemes (see Figure 5) which are bounded and which therefore have to satisfy CFL conditions. So, notwithstanding the non-linearity, the Crank-Nicolson scheme is stable for these equations in the sense that it does not have to satisfy any CFL condition (*cf.* [7, 10]).

3.2.2. *Unconditional stable time integrators*

**First scheme:** $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$. This method is similar to the one proposed in [9, page 131]. This choice in the definition of the matrix (15) corresponds to the system

$$\begin{cases} \dfrac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\delta t} = [\psi_n, \varphi_{n+1}] + \eta J_{n+1} - \eta J_c, & \text{(17a)} \\ \dfrac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\delta t} = [\omega_n, \varphi_{n+1}] + [\psi_n, J_{n+1}] + \nu \Delta \omega_{n+1}, & \text{(17b)} \\ J_{n+1} = \Delta \psi_{n+1}, & \text{(17c)} \\ \omega_{n+1} = \Delta \varphi_{n+1}. & \text{(17d)} \end{cases}$$

This scheme is unconditionally stable, but first order and has the following properties.

**Proposition 3.6.** *[Discrete Energy Conservation] Assume that $J_c = 0$ and $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$. One has the inequality for all $\delta t > 0$*

$$\int_\Omega |\nabla \psi_{n+1}|^2 + |\nabla \varphi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_\Omega |\nabla \psi_n|^2 + |\nabla \varphi_n|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{18}$$

*Proof.* We multiply the equation (17a) by $-\Delta \psi_{n+1}$ and the equation (17b) by $-\varphi_{n+1}$. After integration by parts using the Dirichlet boundary condition, one gets the identities

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \psi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \nabla \psi_{n+1} \cdot \nabla \psi_n \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \delta t \int_\Omega [\psi_n, \varphi_{n+1}] \Delta \psi_{n+1} \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \delta t \eta \int_\Omega |J_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \\ \int_\Omega |\nabla \varphi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \nabla \varphi_{n+1} \cdot \nabla \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\quad - \delta t \int_\Omega \left[ \omega_n, \frac{(\varphi_{n+1})^2}{2} \right] \mathrm{d}\mathbf{x} - \delta t \int_\Omega [\psi_n, \Delta \psi_{n+1}] \varphi_{n+1} \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \delta t \eta \int_\Omega (\omega_{n+1})^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

One has $\delta t \int_\Omega [\omega_n, \frac{(\varphi_{n+1})^2}{2}] \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ and

$$\int_\Omega [\psi_n, \varphi_{n+1}] \Delta \psi_{n+1} \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \delta t \int_\Omega [\psi_n, \Delta \psi_{n+1}] \varphi_{n+1} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$

therefore

$$\int_\Omega |\nabla \psi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega |\nabla \varphi_{n+1}|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_\Omega \nabla \psi_{n+1} \cdot \nabla \psi_n \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla \varphi_{n+1} \cdot \nabla \varphi_n \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

The use of the Cauchy-Schwartz inequality ends the proof. □

**Remark 3.7.** Our numerical tests show that the numerical solution captured by this time integrator has the same features that the one captured by the Cranck-Nicolson time integrator.

**Second scheme:** $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$**.** This choice in the definition of the matrix $\mathbb{M}$ corresponds to the system

$$\begin{cases} \dfrac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\delta t} = [\psi_n, \frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{2}] + \eta \frac{J_{n+1}+J_n}{2} - \eta J_c, & \text{(19a)} \\ \dfrac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\delta t} = [\omega_n, \frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{2}] + [\psi_n, \frac{J_{n+1}+J_n}{2}] + \nu\Delta \frac{\omega_{n+1}+\omega_n}{2}, & \text{(19b)} \\ J_{n+1} = \Delta\psi_{n+1}, & \text{(19c)} \\ \omega_{n+1} = \Delta\varphi_{n+1}. & \text{(19d)} \end{cases}$$

We obtain the same property (18). The proof is almost the same as the proof of proposition 3.6: we multiply the first equation by $-\Delta\left(\frac{\psi_{n+1}+\psi_n}{2}\right)$ and the second one by $-\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{2}$ and perform the same kind of integration by parts. It is reasonable to think that this method has better preservation properties for the energy.

3.2.3. *Adams-Bashfoth time integrator*

As suggested by part 3.1, it is possible to use an explicit numerical integration in time for the non-linear terms. We have tested the Adams-Bashforth order two scheme for the non-linear terms, coupled to an implicit scheme for the diffusion. The numerical integration in time is given by:

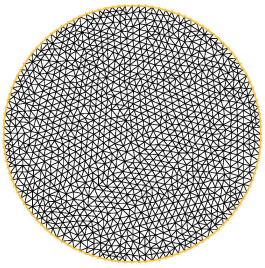
$$\begin{cases} \left(Id - \frac{\delta t}{2}\eta\Delta\right)\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{3}{2}\delta t\left([\psi_n, \varphi_n] - \eta J_c\right) - \frac{1}{2}\delta t\left([\psi_{n-1}, \varphi_{n-1}] - \eta J_c\right) + \frac{\delta t}{2}\eta\Delta\psi_n), \\ \left(Id - \frac{\delta t}{2}\nu\Delta\right)\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{3}{2}\delta t\left([\omega_n, \varphi_n] + [\psi_n, \Delta\psi_n]\right) - \frac{\delta t}{2}\left([\omega_{n-1}, \varphi_{n-1}] + [\psi_{n-1}, \Delta\psi_{n-1}] - \nu\Delta\omega_n\right), \\ J_{n+1} = \Delta\psi_{n+1}, \\ \Delta\varphi_{n+1} = \omega_{n+1}. \end{cases}$$

Contrarily to a standard explicit Euler scheme, the Adams-Bashforth scheme of order two allows to compute a solution for the Current Hole experiment on the FreeFem++ platform. The solution is converged with a smaller $\delta t$ than for the Crank-Nicolson scheme (*cf.* Figure 6). The explicit treatment of the non-linear terms restricts the linear equations to symmetric operators and allows to speed up the computations.

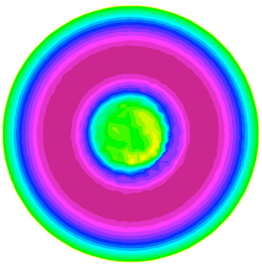
### 3.3. **Numerical results and discussion**

We tested three different numerical schemes to solve the Current Hole. Regarding the initial conditions, the initial magnetic flux $\psi_0$ is obtained by solving the Laplace equation (12c) with homogeneous boundary conditions. The initial electric potential $\varphi_0$ and vorticity $\omega_0$ are taken equal to zero. In our test the source term is [6]

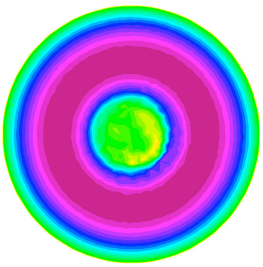
$$J_c = j_1(1 - r^4) - j_2(1 - r^2)^8 \qquad \text{with } j_1 = 0.2 \text{ and } j_2 = 0.2666.$$



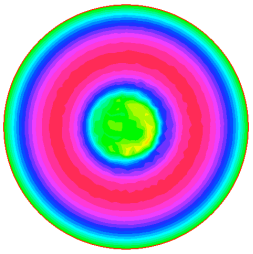
(A) Mesh, $h \sim 0.05$



(B) Crank-Nicolson, $\delta t = 1$



(C) Adams-Bashforth order 2, $\delta t = 0.1$



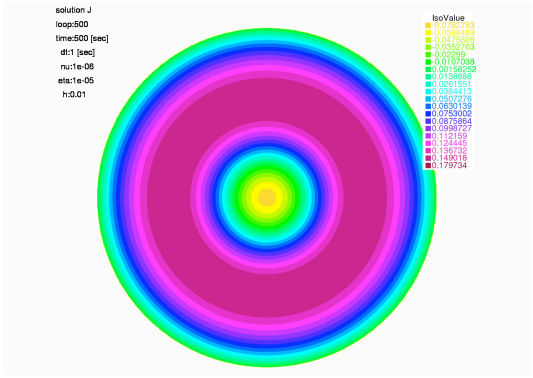
(D) Unconditionally stable scheme, $\delta t = 2$

FIGURE 6. Numerical stability of different time integrator, $t = 2000$. All three results are very similar. This probably is due to the fact that the mesh is the same. The time step is greater for the unconditionally stable scheme.

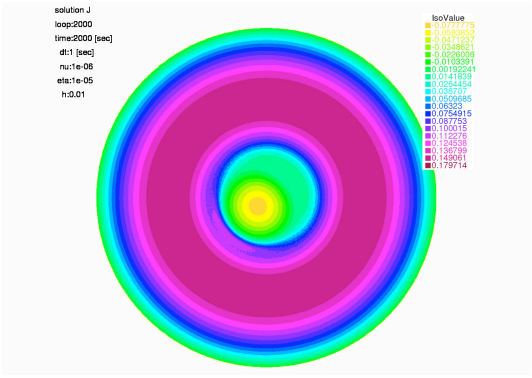
The viscosity is $\nu = 10^{-6}$ and the resistivity $\eta = 10^{-5}$. In Figure 6, we represent the final results at $t = 2000$ of numerical experiments with the Crank-Nicolson scheme and with the Adams-Bashforth second order scheme. We also compare with the unconditionally stable algorithm. The results are visually very similar. The error is totally dominated by the space discretization.

Using an explicit scheme (such as the second order Adams-Bashfoth scheme) allows to diminish the CPU burden per iteration for the computation of the solution of the next step (16). In a Galerkin formulation, there is no numerical viscosity coming from the space discretization to stabilize the numerical scheme. Hence, the Adams-Bashforth scheme order two, which enhances the small scales (see the graph of stability Fig. 5 right) may create spurious oscillations. Therefore, it requires the stronger stability condition $\Delta t \leq C\, h^{\frac{4}{3}}$ than the CFL condition (see [7] for more details). As a result, it needs much smaller time steps than the Crank-Nicolson scheme, whose linear stability domain is exactly the left half-plan (to compare with Figure 5) and which does not have to satisfy any CFL condition in order to be stable. However, for large time steps, the Crank-Nicolson scheme becomes unstable because the equations (12a)-(12d) are non linear. The unconditionally stable algorithm is stable for even larger time steps (up to $\delta t = 10$).

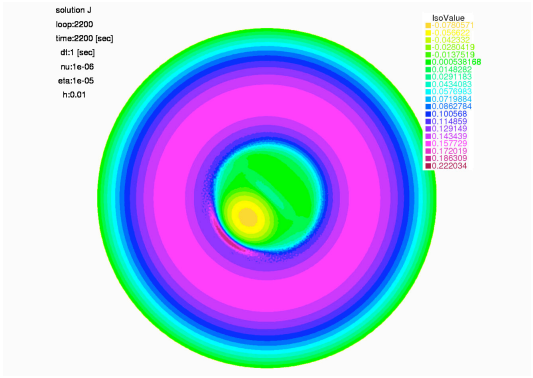
In an attempt to familiarize the reader with the FreeFem++ platform, we briefly describe essential steps for coding the Crank-Nicolson scheme. Once the domain mesh is constructed



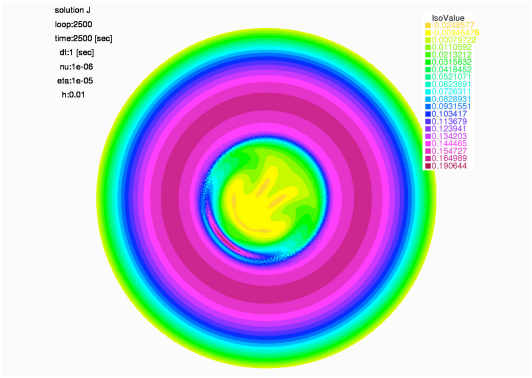

(A) $t = 500$



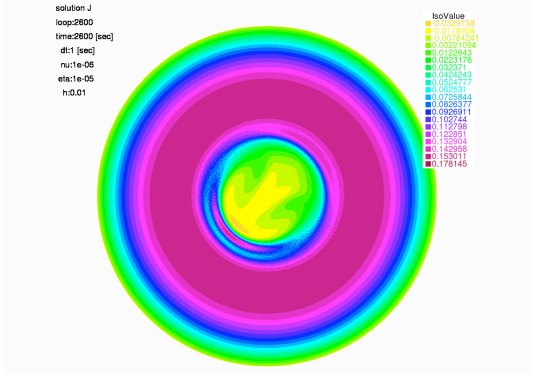

(B) $t = 2000$



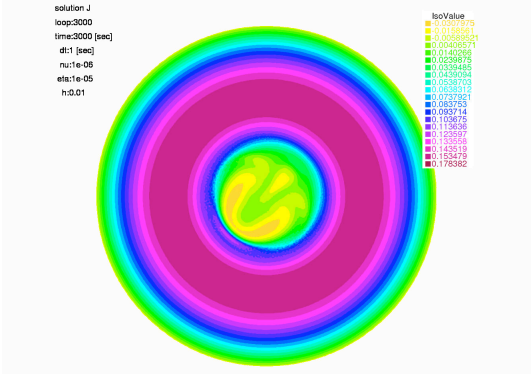

(C) $t = 2200$




(D) $t = 2500$




(E) $t = 2600$




(F) $t = 3000$

FIGURE 7. Plots of the current $J$ computed with FreeFem++. Numerical experiment for the Current Hole, equations (12) discretized with $\mathbb{P}^1$ finite elements and Crank-Nicolson scheme in time with $h = 0.01$, $\delta t = 1$. We observe that the initial stationary solution is unstable.

and the appropriate $\mathbb{P}^1$ or $\mathbb{P}^2$ finite element spaces are initialized, we are ready to define the components of the matrix $\mathbb{M}$ and of the right hand side vector. The following piece of FreeFem++ script illustrates the implementation: one should first define the variational form for each matrix component, and then to build the global matrix.

```
varf a11(u,v) = int2d(Th)(u*v) + int2d(Th)(0.5*dt*(dx(Phi)*dy(u)-dy(Phi)*dx(u))*v) +
    ➥on(1,u=0)
...
matrix A11;
A11 = a11(Vh,Vh);
....
M = [ [A11,A12,A13,0], [A21,A22,A23,A24], [0,A32,0,A34], [A41,0,A43,0] ];
```

The matrix is non symmetric. When choosing a right solver, it is important to consider hardware resources, mainly available memory. For relatively coarse discretizations, we advocate a use of the direct UMFPACK solver, based on the LU factorization. For fine meshes, iterative solver, such as GMRES could be used. However, the authors observed difficulties in convergence of a GMRES solver. The reasons for this poor performance are subject to further investigations.

```
set(M, solver=UMFPACK, eps=1e-8);
```

In the case of the Adams-Bashforth scheme order two, the convective terms are computed explicitly so the matrix (16) is symmetric, positive-definite and invariant along the time. This allows to use a conjugate gradient solver (GMRES) or to invert the matrix (16) at the beginning of the routine once for all the time steps.

The code has been run on a cluster node with two Intel Xeon E5540 processors, *i.e.* 8 cores in total. For this particular example, the spatial resolution has been chosen $h = 0.01$ for $\Omega = \mathcal{C}(0, 1)$, which leads to approximately $142 \cdot 10^3$ degrees of freedom when using $\mathbb{P}^1$ elements. It takes 0.2 second per time step when using a parallel version of the direct solver, UMFPACK V5.4, INTEL MKL V10.3.

Our results for the current hole problem are comparable to the ones obtained in [6]. The profile exhibits a zone of negative current density close to the axis namely the "current hole". Figure 7 shows snapshots of the current profile at different stages of the internal kink evolution. The current surface, initially axisymmetric, remains identical during the linear stage in the early part of the transient, where non-linear effects are still negligible. At the end of this stage, the profile is progressively deformed: current density is expelled outward from the central axis, generating a current sheet at the resonant surface. At the end of the crash, the profile close to the centre is flattened, leaving only residual fluctuations around $J = 0$. Finally we notice that the original problem is invariant by rotation: therefore the orientation and dynamics of the instability can be triggered by the mesh used for the simulation and by the time step; in particular a similar instability is observed in Figure 6 and in Figure 7, but at different angle and time.

## 4. Conclusion and Perspectives

We have presented the use of the FreeFem++ computational tool for the numerical solution of resistive ideal MHD equations adapted to realistic geometrical tokamak configurations. The

method was first applied for the computation of the equilibrium problem and then to the non stationary problem. Some conclusions can already be established for the equilibrium problem: FreeFem++ is very easy to handle and adapted to solve this kind of problems in general geometry, we observe a good agreement with the literature; some questions remain open. It is essentially related to polynomial non-linear right hand sides: in the case of multiple solutions, we need a criteria to select the physical one; is there a criterion to decide a priori what is the more adapted Finite Element type. Concerning the application to the computation of the time-dependent problem of a current hole in a cylindrical geometry, the results are consistent with the results [6] that were obtained with a completely different method. Since the mesh is a general unstructured one, the mesh is by itself a source of perturbation at time $t = 0$. In consequence there is no need of an initial perturbation for the numerical characterization of the current hole. It is possible to evaluate easily different time integrators on the same problem (FreeFem++ scripts used in this paper can be downloaded at `http://www.ann.jussieu.fr/~gostaf/emaff/`).

A general conclusion is that FreeFem++ is very well adapted for the effective simulation of such non trivial plasma problems.

*Acknowledgement.* We warmly thank Guido HUYSMANS for useful discussions and technical contributions at the CEMRACS'10. This project was founded by the AEN Fusion of INRIA.

## REFERENCES

[1] 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. *Hydromagnetic Equilibria and Force-Free Fields*, volume 31, 1958.

[2] S.H. Aydin and M. Tezer-Sezgin. Numerical solution of grad-shafranov equation for the distribution of magnetic flux in nuclear fusion devices. *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences*, 32(5):265–275, 2008.

[3] D. Biskamp. *Nonlinear magnetohydrodynamics*. Cambridge Univ Pr, 1997.

[4] S. Briguglio, G. Wad, F. Zonca, and C. Kar. Hybrid magnetohydrodynamic-gyrokinetic simulation of toroidal alfven modes. *Phys. Plasmas*, 2 (10):3711–3723, 1995.

[5] S. Briguglio, F. Zonca, and C. Kar. Hybrid magnetohydrodynamic-particle simulation of linear and nonlinear evolution of alfven modes in tokamaks. *Phys. Plasmas*, 5 (9):3287–3301, 1998.

[6] O. Czarny and G. Huysmans. Bézier surfaces and finite elements for mhd simulations. *Journal of Computational Physics*, 227(16):7423–7445, 2008.

[7] E. Deriaz and D. Kolomenskiy. Stability of explicit numerical schemes for convection-dominated problems. arXiv:1007.3313v1.

[8] J.P. Freidberg. *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge Univ Pr, 2007.

[9] J.F. Gerbeau, C. Le Bris, and T. Lelièvre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Oxford University Press, USA, 2006.

[10] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, volume 3/4 of *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991.

[11] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. *Freefem++ Manual*, 2010.

[12] A. H. Khater and S. M. Moawad. Exact solutions for axisymmetric nonlinear magnetohydrodynamic equilibria of aligned magnetic field and plasma flow with applications to astrophysics and plasma confinement devices. *Physics of Plasmas*, 16, 2009.

[13] V.D. Shafranov. Plasma equilibrium in a magnetic field. *Reviews of Plasma Physics*, 2:103, 1966.

## Code for the current hole: the Crank-Nicolson scheme

```
// reduced MHD -- Crank-Nicolson

verbosity = 0;
int n = 120;
real jj1=.2, jj2=.266, eta=1e-5, nu=1e-6, dt=1., T=2e4;

//=========================================================
border C1(t=0,2*pi){x=cos(t);y=sin(t);label=1;}
func ThMHD=C1(n);
mesh Th=buildmesh(ThMHD);
plot(Th,wait=1);
//=========================================================

fespace      Vh(Th,P1);
Vh           Psi, dPsi, Phi, dPhi, J, dJ, W, dW,  v;

func         Jc=jj1*(1-(x^2+y^2)^2)-jj2*(1-x^2-y^2)^8;

varf mass(u,v)          = int2d(Th)(u*v);
varf massDirichlet(u,v) = int2d(Th)(u*v)+ on(1,u=0);
varf delta(u,v)         = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v));

problem deltaDir(Psi,v)
               =  int2d(Th)(dx(Psi)*dx(v)+dy(Psi)*dy(v))+int2d(Th)(J*v)+on(1,Psi=0);

varf cpPhi(u,v) =  int2d(Th)(0.5*dt*(dx(Phi)*dy(u)-dy(Phi)*dx(u))*v);
varf cpPsi(u,v) = -int2d(Th)(0.5*dt*(dx(Psi)*dy(u)-dy(Psi)*dx(u))*v);
varf cpJ(u,v)   =  int2d(Th)(0.5*dt*(dx(J)  *dy(u)-dy(J)  *dx(u))*v);
varf cpWDirichlet(u,v)
               = -int2d(Th)(0.5*dt*(dx(W)  *dy(u)-dy(W)  *dx(u))*v)+on(1,u=0);

matrix Md, MdDir, Delta, CPPhi, CPPsi, CPWDir, CPJ, A11, A13, A24, K;

Md     = mass(Vh,Vh);
MdDir  = massDirichlet(Vh,Vh);
Delta  = delta(Vh,Vh);

A13 = -0.5 * dt * eta * Md;

J   = Jc;
Phi = 0.0;
W   = 0.0;

deltaDir;

for (int i=0;i<=T/dt;i++) {

    if (i%5==0) plot(J,fill=1);

    CPPhi  = cpPhi(Vh,Vh);
    CPPsi  = cpPsi(Vh,Vh);
```

```
    CPWDir = cpWDirichlet(Vh,Vh);
    CPJ    = cpJ(Vh,Vh);

    A11 = MdDir + CPPhi;
    A24 = Md + CPPhi + 0.5 * dt * nu * Delta;

    K = [ [A11, CPPsi, A13, 0], [CPJ, CPWDir, CPPsi, A24], [0, Delta, 0, MdDir], [
        ➥Delta, 0, MdDir, 0] ];

    real[int]    F(4*Vh.ndof), F3(Vh.ndof), U(4*Vh.ndof);
    Vh F1, F2;

    varf f1(u,v) = int2d(Th)( dt * (dx(Psi)*dy(Phi) - dy(Psi)*dx(Phi) + eta * (J-Jc))
        ➥*v) + on(1,u=0);
    varf f2(u,v) = int2d(Th)( dt * (dx(W)*dy(Phi) - dy(W)*dx(Phi) + dx(Psi)*dy(J) -
        ➥dy(Psi)*dx(J))*v - dt * nu * (dx(W)*dx(v) + dy(W)*dy(v))) + on(1,u=0);

    F1[] = f1(0,Vh);
    F2[] = f2(0,Vh);
    F3   = 0.0;
    F = [F1[],F2[],F3,F3];

    set(K,solver=UMFPACK);
    U = K^-1*F;

    [dPsi[],dPhi[],dJ[],dW[]] = U;

    Psi[]+=dPsi[];
    Phi[]+=dPhi[];
    J[]  +=dJ[];
    W[]  +=dW[];

}
```